Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2014–04–22

1. Svar $2x - y + z = 2$

   Vektorerna $(1, 1, -1)^t$ och $(1, 1, 1)^t - (0, -1, 1)^t = (1, 2, 0)^t$ är parallella med det sökta planet. En normalvektor till planet fås genom att beräkna vektorprodukten av de två vektorerna.

2. Svar: $x_1 = \frac{6}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t}$ och $x_2 = -\frac{3}{5}e^{2t} + \frac{3}{5}e^{-3t}$
   Med basbytesmatrisen
   $$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$
   fås efter diagonalisering systemet
   $$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) \\ y_2'(t) &= -3y_2(t) \end{aligned}$$

3. Svar: De punkter som ligger närmast origo är $(\pm 1/\sqrt{5}, \mp 2/\sqrt{5})$
   Genom diagonalisering med basbytesmatrisen
   $$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
   fås $4y_1^2 - y_2^2 = 4$ vilket kan skrivas om som
   $$\left(\frac{y_1}{1}\right)^2 - \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 = 1$$
   Alltså en hyperbel och punkterna som ligger närmast origo ges av $(y_1, y_2) = (\pm 1, 0)$ vilket ger punkterna $(\pm 1/\sqrt{5}, \mp 2/\sqrt{5})$ i de ursprungliga koordinaterna.

4. Svar: För $a = -1$ och $b \neq -3$.

   Determinanten av systemets koefficientmatris är $a^3 + 1$ och det enda reella värde på parametern som den är lika med noll är för $a = -1$. För alla andra reella värden på a har ekvationssystemet entydig lösning. Genom att sätt in $a = -1$ och lösa ekvationssystemet så kan man se att lösning saknas då $b \neq -3$.

5. Svar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Alla vektorer i planet $x_1 - x_3 = 0$ är egenvektorer med egenvärde 2. Eftersom matrisen inte är inverterbar så är ett egenvärde lika med noll och eftersom matrisen är symmetrisk så måste motsvarande egenvektor vara vinkelrät mot planet.

6. Matrisen är symmetrisk eftersom $(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$. För motsvarande kvadratiska form gäller att $X^tA^tAX = |AX|^2 \geq 0$. Eftersom A har färre rader än kolonner så har ekvationssystem $AX = 0$ oändligt många lösningar och alltså finns en vektor $X \neq 0$ så att $X^tA^tAX = 0$. Detta visar att matrisen är positivt semidefinit.