Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2014–01–16

1. Svar: $a = \pm\sqrt{3}$

   De fyra punkterna $P_1 = (1, a, 1)$, $P_2 = (2, 0, 3)$, $P_3 = (a, 1, 2)$ och $P_4 = (0, 0, 2)$ ligger i samma plan om och endast om de tre vektorerna $\overrightarrow{P_4P_1} = (1, a, -1)^t$, $\overrightarrow{P_4P_2} = (2, 0, 1)^t$ och $\overrightarrow{P_4P_3} = (a, 1, 0)^t$ ligger i samma plan, d.v.s. determinanten

   $$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = a^3 - 3$$

   är lika med noll.

2. Svar: $x_1 = \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{5t}$ och $x_2 = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t}$

   Med basbytesmatrisen

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   fås efter diagonalisering systemet

   $$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_1(t) \\ y_2'(t) &= 5y_2(t) \end{aligned}$$

3. Svar: $a_n = -2 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n$ och $b_n = -3^n + 2 \cdot 2^n$

   Matrisen

   $$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   är diagonaliserbar $A = PDP^{-1}$ med matriserna

   $$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Svar: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

   En normalvektor till speglingsplanet är $\mathbf{n} = (2, 1, 1)^t - (1, -1, 2)^t = (1, 2, -1)^t$.

5. Antag att $\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2 A\mathbf{x} = 0$. Genom att multiplicera uttrycket med A fås sambandet $\lambda_1 A\mathbf{x} + \lambda_2 A^2\mathbf{x} = \lambda_1 A\mathbf{x} = 0$ eftersom $A^2\mathbf{x} = 0$. Förutsättningen $A\mathbf{x} \neq 0$ ger nu $\lambda_1 = 0$. Insatt i det första uttrycket ger detta $\lambda_2 A\mathbf{x} = 0$ och $\lambda_2 = 0$ eftersom $A\mathbf{x} \neq 0$ enligt förutsättningarna. Detta visar att $\mathbf{x}$ och $A\mathbf{x}$ är linjärt oberoende.

6. Svar: Minsta värdet är 6 och det antas för $x_1 = x_2 = -2$.

   Uttrycket kan skrivas om som

   $$(A\mathbf{x} + \mathbf{y})^t(A\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|A\mathbf{x} - (-\mathbf{y})\|^2$$

   och normalekvationerna kan därför användas för att bestämma $\mathbf{x}$.