Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Jan Åslund

# Tentamen i Linjär algebra med geometri
## TATA67/TEN1

**2014–01–16 kl 8.00–13.00**

Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som 3 poäng på uppgift 1. Skriv G i den ruta på omslaget som hör till uppgift 1 om du har klarat kontrollskrivningen. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För godkänt räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. En uppgift är godkänd om den värderas till minst 2 poäng. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. För vilka värden på parametern $a$ ligger punkterna $(1, a, 1)$, $(2, 0, 3)$, $(a, 1, 2)$ och $(0, 0, 2)$ i samma plan?

2. Lös systemet av differentialekvationer
$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 3x_1(t) - 4x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$
med begynnelsevärdena $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$.

3. Antag att $a_n$ och $b_n$ ges av det rekursiva sambandet
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4a_n - 2b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{aligned}$$
för $n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$, och att $a_0 = 0$ och $b_0 = 1$. Bestäm ett uttryck för $a_n$ som funktion av $n$.

4. Matrisen $A$ representerar en spegling i ett plan genom origo och avbildar vektorn $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t$ på vektorn $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$. Bestäm $A$.

5. Antag att $A$ är en kvadratisk matris och att det finns en vektor $\mathbf{x}$ sådan att $A\mathbf{x} \neq 0$ och $A^2\mathbf{x} = 0$. Visa att då är $\mathbf{x}$ och $A\mathbf{x}$ linjärt oberoende.

6. Antag att
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
Vad är det minsta värdet som uttrycket $(A\mathbf{x} + \mathbf{y})^t(A\mathbf{x} + \mathbf{y})$ kan anta om $x_1$ och $x_2$ kan väljas fritt? För vilka $x_1$ och $x_2$ antas detta värde?

**Lycka till!**