Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2013–08–24

1. Svar: Punkten $(2/3, 1/3, 1/3)$ ligger närmast den givna punkten.

2. Svar: Ekvationssystemet saknar lösning för $a = -2$.

   Systemets koefficientmatris är nollskild för $a \neq \pm 2$, vilket medför att ekvationssystemet har entydig lösning i dessa fall, enligt determinantkriteriet. För $a = 2$ fås parameterlösning och för $a = -2$ saknas lösning.

3. $\mathbf{x}_1 = \frac{12}{5}e^{5t} - \frac{2}{5}e^{-5t}$ och $\mathbf{x}_2 = \frac{4}{5}e^{5t} + \frac{6}{5}e^{-5t}$

   Med basbytesmatrisen
   $$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$
   fås
   $$\begin{aligned} y_1'(t) &= 5y_1(t) \\ y_2'(t) &= -5y_2(t) \end{aligned}$$

4. Svar: $4^{k-1}\begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$

   Matrisen A är diagonaliserbar med basbytesmatrisen
   $$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   och diagonalmatrisen
   $$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Svar: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

   En normalvektor till speglingsplanet är
   $$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

6. Genom att multilpicera med $\mathbf{x}^t$ från vänster fås sambandet $\lambda\mathbf{x}^t M\mathbf{x} + \mathbf{x}^t K\mathbf{x} = 0$ där $\mathbf{x}^t M\mathbf{x} > 0$ och $\mathbf{x}^t K\mathbf{x} > 0$ eftersom $\mathbf{x} \neq 0$ och matriserna M och K är positivt definita enligt förutsättningarna. Detta ger att
   $$\lambda = -\frac{\mathbf{x}^t M\mathbf{x}}{\mathbf{x}^t K\mathbf{x}} < 0$$
   vilket skulle visas.