Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2013–03–22

1. Svar: $\sqrt{6}/2$

   Parameterformen för skärningslinjen är

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

   Vektorn som går mellan punkterna $(1,1,0)$ och $(1,0,1)$ är $\mathbf{u} = (0,-1,1)$. Projektionen på skärningslinjen ges av projektionsformeln och är $\mathbf{u}_L = (-1/2, 0, 1/2)$. Avståndet ges nu av längden på vektorn $\mathbf{u} - \mathbf{u}_L$.

2. Svar: $X = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

   Minsta kvadrat-lösningen ges av normalekvationerna

$$\begin{aligned}6x_1 + 2x_2 &= 6\\ 2x_2 + 3x_2 &= 2\end{aligned}$$

3. Svar: Ekvationssystemet har minst en lösning för alla värden på parametern a.

   Systemets koefficientmatris är nollskild för $a \neq -1, -1/2$. Genom att sätta in $a = -1$ respektive $a = -1/2$ i ekvationssystemet och sedan lösa det så fås parameterlösning i båda fallen.

4. Svar: De punkter som ligger närmast origo är $(\pm\sqrt{2/5}, \pm\sqrt{2/5})$.

   Genom diagonalisering med basbytesmatrisen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

   fås

$$\frac{3}{2}y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 = 2$$

   eller

$$\left(\frac{y_1}{2/\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{2/\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

   Punkterna som ligger närmast origo ges av $(y_1, y_2) = (0, \pm 2/\sqrt{5})$ vilket ger punkterna $(\pm\sqrt{2/5}, \pm\sqrt{2/5})$ i de ursprungliga koordinaterna.

5. Svar: $A^{-1} = -(A+B)C^{-1}$

   Genom att skriva om det givna sambandet $A^2 + AB + C = 0$ som $A(A+B) = -C$ och sedan multiplicera med $-C^{-1}$ från vänster fås sambandet

$$A(A+B)(-C^{-1}) = I$$

   vilket visar att A är inverterbar och att $A^{-1} = (A+B)(-C^{-1})$.

6. Se beviset av sats 7.4 i boken.