Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Jan Åslund

Tentamen i Linjär algebra med geometri

TATA67/TEN1

2013–03–22 kl 8.00–13.00

Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som 3 poäng på uppgift 1. Skriv G i den ruta på omslaget som hör till uppgift 1 om du har klarat kontrollskrivningen. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För godkänt räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. En uppgift är godkänd om den värderas till minst 2 poäng. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Skärningslinjen mellan planen $x - y + z = 0$ och $x + 2y + z = 3$ går inte genom punkten $(1, 0, 1)$. Hur långt ifrån linjen ligger punkten?

2. Bestäm den vektor X som minimerar $|AX - B|^2$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. För vilka värden på parametern a har ekvationssystemet

$$\begin{aligned} -ax + 2y - z &= 1 + 2a \\ y + 2az &= 1 + 2a \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

minst en lösning?

4. Rita en väsentligen riktig skiss av ellipsen

$$2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$$

i x_1x_2-planet. Huvudaxlarnas riktning skall framgå tydligt i figuren. Bestäm även de punkter på ellipsen som ligger närmast origo.

5. Antag att A, B och C är kvadratiska matriser som uppfyller sambandet $A^2 + AB + C = 0$ och att C är inverterbar. Visa att då är även A inverterbar och bestäm A^{-1}.

6. Antag att v_1 och v_2 är egenvektorer som hör till olika egenvärden till en matris A. Visa att då är v_1 och v_2 linjärt oberoende.

Lycka till!