Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2012–12–17

1. Svar: $8/\sqrt{6}$

2. Svar: $x_1 = 7/53$, $x_2 = 11/53$

   Minsta kvadrat-lösningen ges av normalekvationerna

$$\begin{aligned} 6x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 9x_2 &= 2 \end{aligned}$$

3. Svar: $A^k = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \cdot 3^k - (-2)^k & -2 \cdot 3^k + 2 \cdot (-2)^k \\ 3 \cdot 3^k - 3 \cdot (-2)^k & -3^k + 6 \cdot (-2)^k \end{pmatrix}$

   Matrisen A är diagonaliserbar med basbytesmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   och diagonalmatrisen

$$2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Svar: $x_1 = 3e^{2t} - 2e^{4t}$, $x_2 = e^{2t} - 2e^{4t}$

   Efter diagonalisering med basbytesmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   fås

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 4y_1(t) \\ y_2'(t) &= 2y_2(t) \end{aligned}$$

5. Svar: Vektorerna är linjärt beroende för $a = 1$, $b = 2$, samt för $a = 2$, b godtycklig.

   Genom att studera ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & b & 0 \\ -1 & -a & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   så kan man visa att det har parameterlösning, för $a = 1$, $b = 2$, samt för $a = 2$, b godtycklig. För övriga värden på parametrarna har ekvationssystem endast den triviala lösningen, vilket ger att vektorerna är linjärt oberoende för dessa värden.

6. Svar: $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$

   Förutsättningarna ger att i basen

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   kan den kvadratiska formen skrivas $Q = \lambda_1 y_1^2$, där $\lambda_1 > 0$.