Svar med kommentarer till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2012–08–18

1. Svar: $\sqrt{2}$

   x_3-axeln på parameterform ges av

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Kortaste avståndet fås då $t = -2$ och $s = -8$.

2. Svar: $x_1 = 4e^{2t} - e^{-3t}$, $x_2 = 2e^{2t} - 3e^{-3t}$

   Den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer är

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   där konstanterna C_1 och C_2 ges av begynnelsevärdena.

3. Svar: $Q_{min} = 4$ och antas i punkterna $(x_1, x_2) = (\pm 2/\sqrt{3}, \mp 2\sqrt{2/3})$

   Med basbytesmatrisen

$$P = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

   fås $Q = y_1^2 + 4y_2^2$ och minsta värdet antas för $(y_1, y_2) = (\pm 2, 0)$. Återgå till de ursprungliga koordinaterna.

4. Svar: $y = \frac{7}{5}x - \frac{7}{10}$

   Normalekvationerna $A^t A X = A^t B$ där

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

   ger konstanterna a och b.

5. Svar: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Förutsättningarna ger att avbildningsmatrisen måste uppfylla

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$