

Tentamen i Linjär algebra med geometri TATA67/TEN1

2012-04-10 kl 14.00-19.00

Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som 3 poäng på uppgift 1. Skriv G i den ruta på omslaget som hör till uppgift 1 om du har klarat kontrollskrivningen. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För godkänt räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. En uppgift är godkänd om den värderas till minst 2 poäng. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm avståndet mellan punkten $(1, 0, -2)$ och skärningslinjen mellan de två planen $x + y - 2z = 8$ och $x - z = 3$.
2. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{aligned} -x + ay &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ 4x - 2y + az &= b \end{aligned}$$

För vilka värden på parametrarna a och b saknar ekvationssystemet lösning?

3. Bestäm det minsta värde som den kvadratiske formen

$$Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2$$

antar på cirkeln $x_1^2 + x_2^2 = 4$. Ange även i vilka punkter Q antar sitt minsta värde.

4. Antag att a_n och b_n ges av det rekursiva sambandet

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4a_n - 3b_n \\ b_{n+1} &= 2a_n - 3b_n \end{aligned}$$

för $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, och att $a_0 = 5$ och $b_0 = 0$. Bestäm uttryck för a_n och b_n som funktion av n .

5. Avbildningsmatrisen

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

representerar en vridning i \mathbb{R}^3 . Bestäm vridningsvinkeln.

6. Antag att A och B är matriser sådana att $I - AB$ är inverterbar. Visa att då är även matrisen $I - BA$ inverterbar och att $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$.

Lycka till!