**Svar till Linjär algebra med geometri, TATA67, 2011–12–12**

1. Svar: $3\sqrt{7/2}$

   Planet ges av $x + 2y + 3x = -1$

2. Svar: $x_1 = 19/26$, $x_2 = 21/26$

   Normalekvationerna blir:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + 9x_2 &= 8 \end{aligned}$$

3. Svar: $x_1(t) = 6e^t - 2e^{-3t}$, $x_1(t) = 3e^t - 2e^{-3t}$

   Diagonalisering med basbytesmatrisen $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ger systemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= -3y_2 \end{aligned}$$

   vilket har allmän lösning $y_1 = C_1 e^t$, $y_2 = C_2 e^{-3t}$. Svaret fås genom att återgå till de ursprungliga koordinaterna och begynnelsevärdena ger konstanterna $C_1$ och $C_2$.

4. Svar: $(x_1, x_2) = (\pm 1/\sqrt{3}, \mp 1/\sqrt{3})$

   Diagonalisering med basbytesmatrisen $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ger $3y_1^2 - y_2{}^2 = 2$ vilket kan skrivas som om till $(y_1/\sqrt{2/3})^2 - (y_2/\sqrt{2})^2 = 1$. Alltså en hyperbel och de punkter som ligger närmast origo är $(y_1, y_2) = (\pm\sqrt{2/3}, 0)$. Svaret fås genom att återgå till de ursprungliga koordinaterna.

5. Svar: $\lambda^2 + 1 + \lambda^{-1}$

   Enligt definitionen gäller att $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Använder vi definitionen två gånger fås sambandet

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda\lambda\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$$

   Multiplicerar vi $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ med $A^{-1}$ från vänster fås $\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x}$ eller $A^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}$

   Tillsammans ger detta

$$(A^2 + I + A^{-1})\mathbf{x} = A^2\mathbf{x} + I\mathbf{x} + A^{-1}\mathbf{x} = (\lambda^2 + 1 + \lambda^{-1})\mathbf{x}$$

   vilket visar att $\mathbf{x}$ är en egenvektor med egenvärde $\lambda^2 + 1 + \lambda^{-1}$.

6. $A(A^{-1})^t = (A^{-1}A^t)^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I$ ger att $A^{-1} = (A^{-1})^t$ vilket skulle visas. I första likheten användes räkneregeln $(AB)^t = B^t A^t$ och i andra förutsättningen att $A$ är symmetrisk.