Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Jan Åslund

Tentamen i Linjär algebra med geometri

LIMAA4/STN2

2011–12–12 kl 8.00–13.00

Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som 3 poäng på uppgift 1. Skriv G i den ruta på omslaget som hör till uppgift 1 om du har klarat kontrollskrivningen. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För godkänt räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. En uppgift är godkänd om den värderas till minst 2 poäng. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm avståndet mellan punkten $(2, 3, 4)$ och det plan som innehåller de tre punkterna $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, -1)$ och $(1, -1, 0)$.

2. Lös i minsta kvadrat-mening det överbestämda ekvationsystemet $AX = B$ där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Lös systemet av differentialekvationer
$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 5x_1(t) - 8x_2(t) \\ x_2'(t) &= 4x_1(t) - 7x_2(t) \end{aligned}$$
med begynnelsevärdena $x_1(0) = 4$, $x_2(0) = 1$.

4. Rita en väsentligen riktig skiss av kurvan
$$x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 2$$
i x_1x_2-planet. Huvudaxlarnas riktning skall framgå tydligt i figuren. Bestäm även de punkter på kurvan som ligger närmast origo.

5. Antag att matrisen A har egenvektorn $\mathbf{x}$ som svarar mot egenvärdet λ. Visa att då är $\mathbf{x}$ även en egenvektor till matrisen $A^2 + I + A^{-1}$ och bestäm motsvarande egenvärde.

6. Antag att A är en symmetrisk och inverterbar matris. Visa att då är även A^{-1} symmetrisk.

Lycka till!