Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Jan Åslund

Tentamen i Linjär algebra med geometri
TATA67/TEN1

2011–08–20 kl 8.00–13.00

Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som 3 poäng på uppgift 1. Skriv G i den ruta på omslaget som hör till uppgift 1 om du har klarat kontrollskrivningen. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För godkänt räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. En uppgift är godkänd om den värderas till minst 2 poäng. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm avståndet mellan punkten $(1,2,1)$ och det plan som innehåller de tre punkterna $(1,0,1)$, $(2,-1,0)$ och $(1,2,2)$.

2. Bestäm den vektor X som minimerar $|AX-B|^2$ där
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$$

3. Antag att a_n och b_n ges av det rekursiva sambandet
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4a_n - 2b_n\\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{aligned}$$
för $n = 0,1,2,3,\ldots,$, och att $a_0 = 1$ och $b_0 = 1$. Bestäm ett uttryck för a_n som funktion av n.

4. Lös systemet av differentialekvationer
$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 4x_1(t) + x_2(t)\\ x_2'(t) &= 9x_1(t) - 4x_2(t) \end{aligned}$$
med begynnelsevärdena $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0$.

5. Antag att $Q(x_1, x_2)$ är en kvadratisk form som är positivt semidefinit. Det största värde Q antar på enhetscirkeln är 5 och detta värde antas i punkterna $(\pm 4/5, \pm 3/5)$. Bestäm Q.

6. Antag att vektorerna $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ i $\mathbf{R}^n$ är parvis ortogonala och normerade. Visa att de är linjärt oberoende.

Lycka till!