

Tentamen i Linjär algebra med geometri TATA67/TEN1

2011-04-27 kl 8.00-13.00

Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som 3 poäng på uppgift 1. Skriv G i den ruta på omslaget som hör till uppgift 1 om du har klarat kontrollskrivningen. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För godkänt räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. En uppgift är godkänd om den värderas till minst 2 poäng. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller de två parallella linjerna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Lös i minsta kvadrat-mening det överbestämda ekvationsystemet $AX = B$ där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Rita en väsentligen riktig skiss av ellipsen

$$9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 10$$

i x_1x_2 -planet. Huvudaxlarnas riktning skall framgå tydligt i figuren. Bestäm även de punkter på ellipsen som ligger längst ifrån origo.

4. Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 3x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= -3x_1(t) + 4x_2(t) \end{aligned}$$

med begynnelsevärdena $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$.

5. Avbildningsmatrisen

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

representerar en vridning i \mathbb{R}^3 . Bestäm vridningsaxel och vridningsvinkel.

6. Antag att A är en $n \times m$ -matris och att $A^t A \mathbf{x} = \mathbf{0}$ för någon vektor \mathbf{x} i \mathbb{R}^m . Visa att detta medför att $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$. (Ledning: betrakta t.ex. $|A \mathbf{x}|^2$.)

Lycka till!