Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Jan Åslund

Tentamen i Linjär algebra med geometri

TAT67/TEN1

2010–12–16 kl 8.00–13.00

Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som 3 poäng på uppgift 1. Skriv G i den ruta på omslaget som hör till uppgift 1 om du har klarat kontrollskrivningen. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För godkänt räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. En uppgift är godkänd om den värderas till minst 2 poäng. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten $(1, 1, 1)$ och som innehåller skärningslinjen mellan planen $x - z = 2$ och $x - y + z = 2$.

2. För vilka värden på parametrarna a och b saknar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= -1 \\ -2x + ay + 4z &= 2 \\ ax - 2y - 2z &= b \end{aligned}$$

   lösning?

3. Bestäm det största värde som den kvadratiska formen

$$Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2$$

   antar på cirkeln $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Ange även i vilka punkter Q antar sitt största värde.

4. Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 4x_2(t) \end{aligned}$$

   med begynnelsevärdena $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$.

5. Låt $\mathbf{L}$ vara en linjär avbildning i planet. Antag att $\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2}$ är en egenvektor med egenvärde 2 och att $L(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1}$. Bestäm avbildningens matris i basen $(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}) = (\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}, \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})$.

6. Antag att A och B är kvadratiska matriser som uppfyller villkoret

$$A^2 + AB + A + 2I = 0$$

   Visa att A är inverterbar och bestäm A^{-1}.

Lycka till!