Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA45
Provkod: TEN1

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2018-04-06 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^5 + z^4 + 12z^3 + 5z^2 + 27z + 4$$
har i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$.

2. Låt C vara cirkeln $|z| = 1$ tagen ett varv i positiv led. Beräkna integralen
$$\int_C \frac{dz}{z^2(e^{2z} - i)}.$$

3. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar cirkelskivan $|z| < 2$ på halvplanet $\operatorname{Re} w > 0$ samtidigt som $w(2) = \infty$ och $w(i) = 1$. Bestäm sedan bilden i w-planet av imaginäraxeln i z-planet.

4. Bestäm alla hela analytiska funktioner $f = u + iv$ sådana att
$$u + v = 2\,e^{-y} \sin x - 4x \qquad \text{och} \qquad f(0) = 0.$$
f ska uttryckas i variabeln z, alltså som $f(z)$.

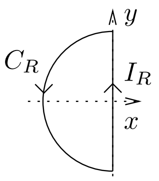
5. Visa att
$$\big|\operatorname{Log}(1 + z) - z\big| \le |z|^2, \qquad |z| \le 1/2,$$
där Log som vanligt står för principallogaritmen.

6. Antag i tur och ordning att
$$\text{(a)} \quad \Omega = \mathbf{C} \qquad \text{(b)} \quad \Omega = \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\} \qquad \text{(c)} \quad \Omega = \mathbf{C}^- = \mathbf{C} \setminus \,]{-\infty}, 0].$$
Om $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ och $f(2z) = f(z)$ för alla $z \in \Omega$, måste då f vara konstant? Bevis eller motexempel i vart och ett av fallen!

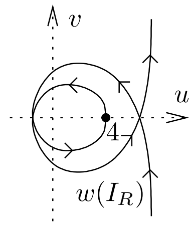
7. Låt
$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0,$$
där $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ och $c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbf{C}$. Visa att det finns något tal z_0 sådant att $|z_0| = 1$ och $|p(z_0)| \ge 1$.

TATA45 Komplex analys 2018-04-06, lösningsskisser

1. Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^5 + z^4 + 12z^3 + 5z^2 + 27z + 4$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R + I_R$ (se figur nere till vänster). På C_R får vi tillskottet $\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^5 + \Delta_{C_R} \arg(1 + 1/z + 12/z^2 + 5/z^3 + 27/z^4 + 4/z^5) \to 5 \cdot \pi + 0 = 5\pi$ då $R \to \infty$. På I_R får vi $p(z) = p(iy) = (y^4 - 5y^2 + 4) + i(y^5 - 12y^3 + 27y) = (y^2 - 1)(y^2 - 4) + i\,y(y^2 - 3)(y^2 - 9) = u + iv$, $y : -R \to R$, och därmed nedanstående teckentabell då $y \geq 0$ (observera att u är jämn och v udda), samt kurva $w = p(z)$ då z genomlöper I_R:



y	0	$<$	1	$<$	$\sqrt{3}$	$<$	2	$<$	3	$<$
u (jämn)	4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
v (udda)	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$



Dessutom får vi av gradskäl att $u/v \to 0$ då $y \to \pm\infty$ (v drar mer än u), och detta tillsammans med tabellen ovan ger skissen ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{I_R} \arg p(z) \to 5\pi$ då $R \to \infty$. Eftersom poler saknas blir antalet nollställen i vänstra halvplanet därför $(1/2\pi) \lim_{R\to\infty}(\Delta_{C_R} \arg p(z) + \Delta_{I_R} \arg p(z)) = (5\pi + 5\pi)/2\pi = 5$. Svar: Fem.

2. Sätt $f(z) = 1/\big(z^2(e^{2z} - i)\big)$. Förutom i punkten $z = 0$ är denna funktion singulär där $e^{2z} = i$, d.v.s. där $2z = \log i = i\pi/2 + i2n\pi$, d.v.s. där $z = i\pi/4 + in\pi$, $n \in \mathbf{Z}$; innanför $C : |z| = 1$ har f därför dubbelpolen $z = 0$ och enkelpolen $z = i\pi/4$. Vi får residyerna

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{e^{2z} - i}\right)\Big|_{z=0} = -\frac{2\,e^{2z}}{(e^{2z} - i)^2}\Big|_{z=0} = \frac{1}{i}$$

och

$$\operatorname*{Res}_{z=i\pi/4} f(z) = \frac{1/z^2}{\frac{d}{dz}(e^{2z} - i)}\Big|_{z=i\pi/4} = \frac{1/z^2}{2\,e^{2z}}\Big|_{z=i\pi/4} = -\frac{8}{i\pi^2},$$

så residysatsen medför att

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{i} - \frac{8}{i\pi^2}\right) = 2\pi - \frac{16}{\pi}.$$

3. Att $w(i) = 1$ ger med nödvändighet $w(4i) = -1$, eftersom i och $4i$ är spegelpunkter m.a.p. cirkeln $|z| = 2$, och 1 och -1 är spegelpunkter m.a.p. linjen $\operatorname{Re} w = 0$ (rita figurer!). Eftersom dessutom $w(2) = \infty$ (randpunkt på randpunkt) är Möbiusavbildningen entydigt bestämd, och vi får den enklast m.h.a. en ansats som använder punkterna $w(i) = 1$ och $w(2) = \infty$, nämligen ansatsen $(w - 1)/1 = k(z - i)/(z - 2)$; insättning av $w(4i) = -1$ ger $k = -(8 + 4i)/3$ och därmed $w(z) = 1 - (8 + 4i)(z - i)/3(z - 2) = \big((-5 - 4i)z - (10 - 8i)\big)/3(z - 2)$. Denna avbildar cirkeln $|z| = 2$ på linjen $\operatorname{Re} w = 0$, och eftersom $w(i) = 1$ avbildar den dessutom området $|z| < 2$ på halvplanet $\operatorname{Re} w > 0$ (inre punkt avbildas på inre punkt).

   Låt L vara imaginäraxeln $\operatorname{Re} z = 0$ i z-planet och $\tilde{L}$ den $\hat{\mathbf{C}}$-cirkel i w-planet som L avbildas på under $w(z)$ ovan. Eftersom $w(2) = \infty$ och $2 \notin L$ är $\tilde{L}$ en vanlig cirkel $|w - c| = r$, där centrum $c = w(-2) = -4i/3$ eftersom 2 och -2 är spegelpunkter m.a.p. L och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{L}$. Slutligen, $i \in L$ ger $w(i) = 1 \in \tilde{L}$, så $r = |1 - (-4i/3)| = 5/3$, och $\tilde{L}$ är cirkeln $|w - (-4i/3)| = 5/3$.

   Svar: $w(z) = 1 - \dfrac{(8 + 4i)(z - i)}{3(z - 2)} = \dfrac{(-5 - 4i)z - (10 - 8i)}{3(z - 2)}$; cirkeln $\left|w - (-\dfrac{4i}{3})\right| = \dfrac{5}{3}$.

4. Derivering m.a.p. x respektive y och användning av Cauchy-Riemanns ekvationer ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} u'_x + v'_x = 2\,e^{-y}\cos x - 4 = u'_x - u'_y, \\ u'_y + v'_y = \ \ -2\,e^{-y}\sin x \ \ = u'_y + u'_x, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u'_x = \ \ \ e^{-y}\cos x - e^{-y}\sin x - 2, \\ u'_y = -e^{-y}\cos x - e^{-y}\sin x + 2. \end{cases}$$

Integration av den första m.a.p. x ger $u = e^{-y}\sin x + e^{-y}\cos x - 2x + \varphi(y)$, där φ är en reellvärd funktion av en reell variabel. Derivering m.a.p. y och insättning i den andra ger sedan $\varphi'(y) = 2$, alltså $\varphi(y) = 2y + A$, där A är en reell konstant. Vi får, eftersom $u + v = 2\,e^{-y}\sin x - 4x$, att

$$f = u + iv = (e^{-y}\sin x + e^{-y}\cos x - 2x + 2y + A) + i(e^{-y}\sin x - e^{-y}\cos x - 2x - 2y - A).$$

f är alltså en hel funktion, och på realaxeln $z = x$ sammanfaller den med den hela funktionen $g(z) = (\sin z + \cos z - 2z + A) + i(\sin z - \cos z - 2z - A) = (1+i)\sin z + (1-i)\cos z - 2(1+i)z + (1-i)A$. Entydighetssatsen medför därför att $f(z) = g(z)$ överallt. Kravet $f(0) = 0$ ger slutligen $A = -1$.

Svar: $f(z) = (1+i)\sin z + (1-i)\cos z - 2(1+i)z - (1-i)$.

5. I skivan $|z| < 1$ är $\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}z^n/n$, varför

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{Log}(1+z) - z\right| &= \left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}\right| \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{|z|^n}{n} \le \frac{|z|^2}{2}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}|z|^{n-2} \\ &\le \frac{|z|^2}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{|z|^2}{2}\cdot\frac{1}{1-1/2} = |z|^2, \qquad |z| \le 1/2,\end{aligned}$$

vilket skulle bevisas.

6. (a) Fixera $z \in \mathbf{C}$. Vi får $f(z) = f(z/2) = f(z/2^2) = \ldots = f(z/2^n)$ för alla $n \in \mathbf{N}$. Men f är kontinuerlig, så $f(z/2^n) \to f(0)$ då $n \to \infty$, varför $f(z) = f(0)$, oberoende av z. Således är f en konstant funktion. Svar: Ja.

   (b) f är kontinuerlig, så f är begränsad på den kompakta mängden $1 \le |s| \le 2$; m.a.o. finns det en konstant C sådan att $|f(s)| \le C$ närhelst $1 \le |s| \le 2$. Fixera $z \in \mathbf{C}^*$. Då finns ett $n \in \mathbf{Z}$ sådant att $1 \le 2^n|z| \le 2$, och därmed är $|f(2^n z)| \le C$. Men $f(z) = f(2^k z)$ för varje $k \in \mathbf{Z}$, som en konsekvens av antagandet, så även $|f(z)| \le C$. Således är f begränsad i $\mathbf{C}^*$, och eftersom $f \in \mathcal{A}(\mathbf{C}^*)$ har f en hävbar singularitet i origo. Vi kan alltså definiera $f(0)$ så att $f \in \mathcal{A}(\mathbf{C})$, och eftersom denna utvidgade f är begränsad i $\mathbf{C}$ medför Liouvilles sats att f är konstant på $\mathbf{C}$, och därmed också på $\mathbf{C}^*$. Svar: Ja.

   (c) Vi ska visa att ett motexempel ges av

$$f(z) = \exp\left(\frac{2\pi i\cdot\operatorname{Log} z}{\ln 2}\right).$$

   Till att börja med, eftersom $\operatorname{Log} \in \mathcal{A}(\mathbf{C}^-)$ får vi $f \in \mathcal{A}(\mathbf{C}^-)$. Vidare, $\operatorname{Log} 2z = \ln|2z| + i\operatorname{Arg} 2z = \ln 2 + \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln 2 + \operatorname{Log} z$, så

$$f(2z) = \exp\left(\frac{2\pi i\cdot\operatorname{Log} 2z}{\ln 2}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i\cdot(\ln 2 + \operatorname{Log} z)}{\ln 2}\right) = \underbrace{e^{2\pi i}}_{=1}\cdot\exp\left(\frac{2\pi i\cdot\operatorname{Log} z}{\ln 2}\right) = f(z).$$

   Svar: Nej.

7. Antag att påståendet inte är sant, d.v.s. att $|p(z)| < 1$ för alla z på cirkeln $|z| = 1$. Sätt $f(z) = -z^n$. Då är $f(z) + p(z) = c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$, ett polynom av grad högst $n-1$. Notera att $|f(z)| = |z|^n = 1$ på cirkeln $|z| = 1$. Därmed är $|f(z)| > |p(z)|$ på denna cirkel, så Rouchés sats medför att $f(z)$ och $f(z) + p(z)$ har lika många nollställen i skivan $|z| < 1$. Men $f(z)$ har exakt n nollställen där (ett nollställe av multiplicitet n i origo) medan $f(z) + p(z)$ kan ha högst $n-1$ där.

   Motsägelse!

   Alltså måste vårt antagande vara felaktigt, varför det finns någon punkt z_0 sådan att $|z_0| = 1$ och $|p(z_0)| \ge 1$, vilket skulle bevisas.

TATA45 Komplex analys 2018-04-06, kommentarer

1. Som vanligt räcker det att faktorisera endast en av u och v vid undersökningen längs imaginäraxeln, jfr anmärkningen i kompendiet.

2. Observera att ekvationen $e^{2z} = i$ har oändligt många olika lösningar: $z = i\pi/4 + i\pi n$, där $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; dessa punkter befinner sig alla på imaginäraxeln (med inbördes avstånd π). Flera verkar tro att ekvationen endast har lösningarna $z = i\pi/4$ och $z = i5\pi/4$ (FEL), vilket möjligen beror på en sammanblandning med det faktum att $\exp(i\pi/4 + i\pi n)$ endast har två olika värden, nämligen $e^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}$ och $e^{i5\pi/4} = -(1+i)/\sqrt{2}$, men det är ju inte relevant i sammanhanget.

   Några beräknar residyn i enkelpolen $z = i\pi/4$ fel, och tror att

$$\operatorname*{Res}_{z=i\pi/4} f(z) = \frac{1}{z^2}\Big|_{z=i\pi/4} \qquad \text{(FEL)},$$

   som om man bara kunde ta bort den ”farliga” faktorn $(e^{2z} - i)$; ett grovt fel.

3. Inget att kommentera.

4. Svaret kan också skrivas mera kompakt: $f(z) = (1-i)e^{iz} - 2(1+i)z - (1-i)$.

   Några använder inte villkoret på $u + v$ för att ta fram v när väl u är bestämd, utan bestämmer i stället både u och v utgående från Cauchy-Riemanns ekvationer – rekommenderas ej! De får då $u = e^{-y}\sin x + e^{-y}\cos x - 2x + 2y + A$ och $v = e^{-y}\sin x - e^{-y}\cos x - 2x - 2y + B$, vilket är FÖR ALLMÄNT eftersom kravet på $u + v$ medför att $B = -A$.

   Alternativ lösning: Sätt $g = (1-i)f$; då är g analytisk precis då f är analytisk. Skriv $g = \alpha + i\beta$. Då är $\alpha = u + v$, och vi kan därför använda Cauchy-Riemanns ekvationer på α och β för att bestämma g och sedan få f.

5. Några har försökt använda Maclaurinutveckling med restterm i $\mathcal{O}$-form, men det kan – lika lite som i reell analys – ge en feluppskattning.

   Någon har försökt med något som liknar Lagranges restterm (med ett ξ), men Maclaurinutveckling med Lagranges restterm är ett rent reellt resultat och fungerar inte i komplex analys, jfr anmärkningen om medelvärdessatsen i kompendiet.

   Precis samma bevis fungerar för övrigt i reell envariabelanalys för att bevisa att $\big|\ln(1+x) - x\big| \le |x|^2$ då $|x| \le 1/2$.

   Alternativt bevis: Sätt $f(z) = \operatorname{Log}(1+z) - z$. Eftersom $f(0) = 0$ får vi, om $|z| \le 1/2$,

$$\big|\operatorname{Log}(1+z) - z\big| = \big|f(z) - f(0)\big| = \left|\int_{[0,z]} f'(s)\,ds\right| = \left|\int_{[0,z]} \frac{-s}{1+s}\,ds\right| \le \int_{[0,z]} \frac{|s|}{|1+s|}\,|ds|$$
$$\overset{*}{\le} \frac{1}{1/2}\int_{[0,z]} |s|\,|ds| \overset{**}{=} 2\int_0^1 t|z|\,|z|dt = 2|z|^2\int_0^1 t\,dt = |z|^2,$$

   där olikheten $*$ beror på att $|1+s| \ge 1 - |s| \ge 1 - |z| \ge 1/2$ på sträckan $[0,z]$ från $s = 0$ till $s = z$ då $|z| \le 1/2$, och likheten $**$ följer av parametriseringen $s = tz$, $t : 0 \to 1$, av denna sträcka.

6. Notera att det enda som behövs i beviset i (a) är att f är *kontinuerlig* i $\mathbf{C}$; att f är hel analytisk används inte fullt ut.

   Alternativt bevis i (b): Eftersom f är analytisk i $\mathbf{C}^*$ kan f utvecklas i Laurentserie där: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, $z \ne 0$. Men då är $f(2z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (2z)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n c_n z^n$, $z \ne 0$, och kravet $f(2z) = f(z)$ medför nu, tack vare entydighet hos Laurentseriekoefficienterna, att $2^n c_n = c_n$, $n \in \mathbf{Z}$, vilket i sin tur medför att $c_n = 0$ för $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$; endast c_0 kan alltså överleva, och därmed är $f(z) = c_0$ för $z \ne 0$, alltså konstant. (Ett närmast identiskt bevis fungerar i (a), med Maclaurinserier.)

7. Inget att kommentera.

Lars Alexandersson, 17 april 2018