Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: `TATA45`
Provkod: `TEN1`

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2017-08-24 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. Bestäm alla $z \in \mathbf{C}$ sådana att
$$2\sin^2 z - 5\sin z + 2 = 0.$$
Svaret ska ges i rektangulär form, alltså i formen $a + ib$ där $a, b \in \mathbf{R}$.

2. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som tar cirkeln $|z| = 2$ på cirkeln $|w| = 2$ samtidigt som $w(0) = 1$ och $w(2i) = 2$. Bestäm sedan bilden i w-planet av realaxeln $\operatorname{Im} z = 0$ i z-planet.

3. Utveckla funktionen
$$f(z) = \frac{z+1}{z^2 + 2z}$$
i en Laurentserie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-1)^n$ i största möjliga ring $r < |z-1| < R$ som innehåller punkten $z = 2 + 2i$. Radierna r och R ska anges.

4. Beräkna
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2}\, dx, \qquad a > 0.$$

5. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^5 - 2z^4 + 3z^3 - 2z^2 + z - 1$$
har i sektorn $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/4$.

6. Låt
$$f(z) = \frac{2z^5 - 4z^2 + 5}{3z^6 - 8z + 10}.$$
   (a) Bestäm en radie R sådan att samtliga poler till f finns i cirkelskivan $|z| < R$.
   (b) Beräkna $\int_{C_R} f(z)\, dz$, där C_R är cirkeln $|z| = R$ tagen ett varv i positiv led och R är en radie som duger i (a).

7. Antag att $f = u + iv$ är hel analytisk och att $f(0) = 0$. Visa att
$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(u(re^{i\theta})\big)^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \big(v(re^{i\theta})\big)^2 d\theta, \qquad r > 0.$$

TATA45 Komplex analys 2017-08-24, lösningsskisser

1. Med $w = \sin z$ får vi ekvationen $0 = 2w^2 - 5w + 2 = (w-2)(2w-1)$, som alltså har lösningarna $w_1 = 2$ och $w_2 = 1/2$. Eftersom $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ får vi därför, med bytet $s = e^{iz}$, ekvationerna $s^2 - 4is - 1 = 0$ respektive $s^2 - is - 1 = 0$, med de totalt fyra lösningarna $s_{1,2} = (2 \pm \sqrt{3})i$ och $s_{3,4} = (\pm\sqrt{3} + i)/2$. Eftersom $z = -i \log s = \arg s - i \ln |s|$ får vi därför till sist – rita $s_1, \ldots, s_4$ i en figur! – att $z = (\pi/2 + 2m\pi) - i \ln(2 \pm \sqrt{3}) = (\pi/2 + 2m\pi) \mp i \ln(2 + \sqrt{3})$, $m \in \mathbf{Z}$, eller $z = (\pi/2 \pm \pi/3 + 2n\pi) - i \ln 1 = (\pi/2 \pm \pi/3 + 2n\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$.

   Svar: $z = (\pi/2 + 2m\pi) \pm i \ln(2 + \sqrt{3})$, $m \in \mathbf{Z}$, eller $z = \pi/2 \pm \pi/3 + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. Att $w(0) = 1$ ger med nödvändighet $w(\infty) = 4$, eftersom 0 och ∞ är spegelpunkter m.a.p. cirkeln $|z| = 2$, och 1 och 4 är spegelpunkter m.a.p. cirkeln $|w| = 2$ (rita figurer!). Kravet $w(2i) = 2$ innebär att randpunkten $z = 2i$ avbildas på randpunkten $w = 2$, och därmed kommer Möbiusavbildningen som bestäms entydigt av dessa tre punktpar att avbilda som önskat. Vi får med standardmetoder $w(z) = (4z + 4i)/(z + 4i)$.

   Låt Γ_z vara realaxeln $\operatorname{Im} z = 0$ i z-planet och Γ_w den $\hat{\mathbf{C}}$-cirkel i w-planet som Γ_z avbildas på under $w(z)$ ovan. Eftersom $w(-4i) = \infty$ och $-4i \notin \Gamma_z$ är Γ_w en vanlig cirkel $|w - c| = r$, med centrum $c = w(4i) = 5/2$ eftersom $-4i$ och $4i$ är spegelpunkter m.a.p. Γ_z och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. Γ_w. Radien r fås nu enklast genom att använda att t.ex. $w(0) = 1 \in \Gamma_w$ eftersom $0 \in \Gamma_z$, varför $r = |1 - 5/2| = 3/2$; alltså är Γ_w cirkeln $|w - 5/2| = 3/2$.

   Svar: $w(z) = \dfrac{4z + 4i}{z + 4i}$; bilden är $\left| w - \dfrac{5}{2} \right| = \dfrac{3}{2}$.

3. $f(z)$ är analytisk förutom i polerna $z = 0$ och $z = -2$, så konvergensområdena med centrum i $z = 1$ för Laurentserierna till $f(z)$ är $|z - 1| < 1$, $1 < |z - 1| < 3$ och $|z - 1| > 3$. Eftersom serien ska konvergera i punkten $z = 2 + 2i$ och $|(2 + 2i) - 1| = \sqrt{5}$ inser vi att rätt konvergensområde är $1 < |z - 1| < 3$. Vi får nu, med geometriska serier $1/(1 - q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ för $|q| < 1$, att

$$\frac{z+1}{z^2+2z} = \frac{z+1}{z(z+2)} = \frac{1/2}{z} + \frac{1/2}{z+2} = \left[\begin{array}{c} w = z - 1 \\ 1 < |w| < 3 \end{array} \right] = \frac{1/2}{w+1} + \frac{1/2}{w+3}$$
$$= \frac{1/2}{w} \cdot \frac{1}{1 + 1/w} + \frac{1/2}{3} \cdot \frac{1}{1 + w/3} = \frac{1}{2w} \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{w})^n + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{w}{3})^n$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{3^n}, \qquad 1 < |z - 1| < 3;$$

   speciellt är alltså $r = 1$ och $R = 3$.

4. Eftersom integranden är rent reell och $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$ inser vi att den sökta integralen kan skrivas

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} \, dx = \operatorname{Re} J, \quad \text{där} \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)^2} \, dx, \qquad a > 0.$$

   Låt $f(z) = e^{iz}/(z^2 + a^2)^2 = e^{iz}(z + ia)^{-2}(z - ia)^{-2}$; då är $J = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$. Låt vidare L_R vara sträckan från $z = -R$ till $z = R$ och C_R^+ halvcirkeln från $z = R$ till $z = -R$ i övre halvplanet (rita figur!). Vi observerar att $|e^{iz}| = e^{-y} \le 1$ på C_R^+ eftersom $y \ge 0$ där, så ML-uppskattning ger $|\int_{C_R^+} f(z)\, dz| \le \pi R \cdot 1/(R^2 - a^2)^2 \to 0$ då $R \to \infty$. Residysatsen ger, då $R > a$,

$$\int_{L_R + C_R^+} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ia} f(z) = \Big/ f(z) = \frac{e^{iz}(z + ia)^{-2}}{(z - ia)^2} \Big/ = 2\pi i \cdot \frac{d}{dz} \big(e^{iz}(z + ia)^{-2}\big)_{|z=ia}$$
$$= 2\pi i \, e^{iz} \big(i(z + ia)^{-2} - 2(z + ia)^{-3}\big)_{|z=ia} = 2\pi e^{-a} \left(\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^3} \right),$$

   och genom att låta $R \to \infty$ här (observera att $\int_{L_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(t)\, dt \to J$ då $R \to \infty$) får vi

$$J + 0 = 2\pi e^{-a} \left(\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^3} \right) = \frac{\pi e^{-a}}{2a^3}(a + 1), \qquad \text{så} \qquad \underbrace{I = \operatorname{Re} J = \frac{\pi e^{-a}}{2a^3}(a + 1), \quad a > 0}_{\text{Svar}}.$$

5. Vi ser till att börja med att på realaxeln är $p(z) = p(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ ett rent reellt polynom, och eftersom $p(0) = -1 < 0$ och $p(x) \to +\infty$ då $x \to +\infty$ finns det ett nollställe någonstans *på* positiva realaxeln; prövning ger ett nollställe $x = 1$. Vi faktoriserar:

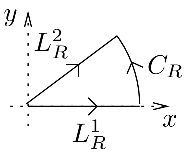
$$p(z) = z^5 - 2z^4 + 3z^3 - 2z^2 + z - 1 = (z-1)q(z), \qquad \text{där} \qquad q(z) = z^4 - z^3 + 2z^2 + 1.$$

Eftersom $z = 1$ inte ligger i sektorn $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/4$ har p och q samma antal nollställen i denna sektor. Vi studerar därför argumenttillskottet för $q(z) = z^4 - z^3 + 2z^2 + 1$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = L_R^1 + C_R - L_R^2$ (se figur nere till vänster).

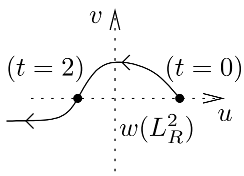
Vi får genast $\Delta_{C_R} \arg q(z) = \Delta_{C_R} \arg z^4 + \Delta_{C_R} \arg(1 - 1/z + 2/z^2 + 1/z^4) \to 4 \cdot \pi/4 = \pi$ då $R \to \infty$.

På L_R^1 får vi $q(z) = q(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 1 \geq 1$ då $x \geq 0$, eftersom $x^2 \geq x^3$ då $0 \leq x \leq 1$ och $x^4 \geq x^3$ då $x \geq 1$. $q(z)$ är alltså reell och strikt positiv på L_R^1, så $\Delta_{L_R^1} \arg q(z) = 0$ för alla $R > 0$.

Sträckan L_R^2 kan vi parametrisera med $z = t + it$, $t : 0 \to R/\sqrt{2}$, och vi får där $q(z) = q(t + it) = (-4t^4 + 2t^3 + 1) + i(-2t^3 + 4t^2) = u(t) + i\,v(t)$, där $v(t) = -2t^2(t-2)$, så vi får nedanstående tabell och kurva $w = q(z)$ då z genomlöper L_R^2 (kv = kvadrant, *hp* = *halvplan*):



t	0	$<$	2	$<$	$+\infty$
u	$+$	?	$-$	?	$-$
v	0	$+$	0	$-$	$-$
kv/*hp*		*övre*		*undre*	3



Dessutom får vi av gradskäl att $v/u \to 0$ då $t \to +\infty$ (u drar mer än v), och detta tillsammans med tabellen ovan ger skissen ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{L_R^2} \arg q(z) \to \pi$ då $R \to \infty$. Eftersom poler saknas blir antalet nollställen för q, och därmed för p, i sektorn $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/4$ $(1/2\pi) \lim_{R\to\infty} \big(\Delta_{L_R^1} \arg q(z) + \Delta_{C_R} \arg q(z) - \Delta_{L_R^2} \arg q(z)\big) = (0 + \pi - \pi)/2\pi = 0$. <u>Svar</u>: Noll.

6. (a) $f(z) = p(z)/q(z)$, där nämnaren $q(z) = 3z^6 - 8z + 10$; eftersom $\operatorname{grad} q = 6$ har q sex nollställen totalt i $\mathbf{C}$. Låt $g(z) = 3z^6$ och $h(z) = -8z + 10$. På cirkeln $|z| = R$ är $|g(z)| = 3R^6$ och $|h(z)| \leq 8R + 10$, så när $3R^6 > 8R + 10$ medför Rouchés sats att $q(z) = g(z) + h(z)$ har lika många nollställen i skivan $|z| < R$ som $g(z)$, d.v.s. alla sex. *Ett* sådant val av R är $R = 2$, ty $3 \cdot 2^6 = 192 > 26 = 8 \cdot 2 + 10$. <u>Svar</u>: T.ex. $R = 2$.

   (b) När $|z|$ är stort är $f(z)$ approximativt lika med $2/3z$. Sätt

$$g(z) := f(z) - \frac{2}{3z} = \frac{2z^5 - 4z^2 + 5}{3z^6 - 8z + 10} - \frac{2}{3z} = \frac{-12z^3 + 31z - 20}{3z(3z^6 - 8z + 10)}.$$

Eftersom f är analytisk på och utanför cirkeln $|z| = R$ medför Cauchys integralsats tillämpad på ringen $R < |z| < \rho$ att

$$(*) \qquad \int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{C_\rho} f(z)\,dz = \int_{C_\rho} \frac{2}{3z}\,dz + \int_{C_\rho} g(z)\,dz = 2\pi i \cdot \frac{2}{3} + \int_{C_\rho} g(z)\,dz$$

för alla $\rho > R$. Men $\int_{C_\rho} g(z)\,dz \to 0$ då $\rho \to \infty$ eftersom ML-uppskattning ger

$$\left| \int_{C_\rho} g(z)\,dz \right| \leq \frac{12\rho^3 + 31\rho + 20}{3\rho(3\rho^6 - 8\rho - 10)} \cdot 2\pi\rho \to 0, \qquad \rho \to \infty,$$

av gradskäl. Genom att för fixt R låta $\rho \to \infty$ i $(*)$ får vi därför att $\int_{C_R} f(z)\,dz = 4\pi i/3$.
<u>Svar</u>: $4\pi i/3$.

7. Även $f^2 = (u^2 - v^2) + i\,2uv$ är hel analytisk, och därför medför medelvärdesegenskapen att

$$0 = \big(f(0)\big)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(re^{i\theta})\big)^2\,d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\big(u(re^{i\theta})\big)^2 - \big(v(re^{i\theta})\big)^2 + i\,2u(re^{i\theta})v(re^{i\theta}) \Big)\,d\theta$$

närhelst $r > 0$, och genom att ta realdelar i denna ekvation följer påståendet.

TATA45 Komplex analys 2017-08-24, kommentarer

1. Flera förkastar de komplexa z som löser ekvationen $\sin z = 2$ i tron att $|\sin z| \leq 1$ (FEL); $\sin z$ kan ju anta *alla* komplexa värden. Däremot är som bekant $-1 \leq \sin x \leq 1$ för alla *reella* tal x.

   Sätter man $s = e^{iz}$ redan från början blir det onödigt svårt, eller rent av omöjligt.

   Det är naturligtvis OK att skriva $z = (\pi/2 + 2m\pi) - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$ eller rent av $z = (\pi/2 + 2m\pi) + i\ln(2 \pm \sqrt{3})$ i svaret i stället för $z = (\pi/2 + 2m\pi) \pm i\ln(2 + \sqrt{3})$; observera att $2 - \sqrt{3} = 1/(2 + \sqrt{3})$. Likaså kan man självfallet skriva ut de båda vinklarna $5\pi/6$ och $\pi/6$ separat i stället för att skriva ihop dem som $\pi/2 \pm \pi/3$.

2. Några få har inte använt spegelpunkter utan har kompletterat de givna $w(0) = 1$ och $w(2i) = 2$ med att avbilda en andra punkt på cirkeln $C_z : |z| = 2$ på en andra punkt på cirkeln $\tilde{C}_w : |w| = 2$, typiskt $w(2) = 2i$ eller $w(-2i) = -2$; valet $w(2) = 2i$ ger fel avbildning medan valet $w(-2i) = -2$ RÅKAR ge rätt avbildning, men utan ytterligare argument duger inte en sådan lösning.

   Spegelpunktsmetoden är överlägsen och är den jag rekommenderar, men man *kan* rättfärdiga valet $w(-2i) = -2$ ovan så här: Möbiusavbildningar avbildar $\hat{\mathbf{C}}$-cirklar på $\hat{\mathbf{C}}$-cirklar och är konforma, och tre olika punkter i $\hat{\mathbf{C}}$ bestämmer entydigt en $\hat{\mathbf{C}}$-cirkel. Den Möbius $w(z)$ som tar $(0, 2i, -2i)$ på $(1, 2, -2)$ avbildar därför imaginäraxeln I_z på realaxeln R_w, och om Γ är bilden i w-planet av C_z avbildas de räta skärningsvinklarna mellan C_z och I_z vid $z = \pm 2i$ på räta skärningsvinklar mellan Γ och R_w vid $w = \pm 2$, så Γ måste vara cirkeln $|w| = 2$.

3. Observera att den aktuella Laurentserien endast får innehålla potenser av $(z - 1)$, så att svara med något som innehåller t.ex. $(z + 2)$ duger alltså inte.

   Några tror att $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1+q)$ (FEL) då $|q| < 1$ i stället för det korrekta $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$.

   Ett fåtal får rätt utseende på *termerna*, men svarar med följande utveckling i ringen $1 < |z-1| < 3$:

   $$\frac{z+1}{z^2+2z} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} + \frac{1}{6}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n(z-1)^n}{3^n} \qquad \text{(FEL)}.$$

   Lägg märke till de felaktiga undre gränserna: Att skriva $n = -\infty$ i stället för det korrekta $n = 0$ är ödesdigert, eftersom serierna då faktiskt blir divergenta överallt – ett grovt fel, med andra ord.

4. Några svarar med ett ickereellt värde, vilket är orimligt eftersom integralen är rent reell.

   Oväntat många utnyttjar samma kontur som i lösningsskissen men integrerar $(\cos z)/(z^2 + a^2)^2$ i stället för $e^{iz}/(z^2 + a^2)^2$. Problemet med det är att $\cos z$ *inte* är begränsad i övre halvplanet $y \geq 0$ eftersom $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$, som ju blir stort när y blir stort, se Övning 2.21 i kompendiet 2015. Däremot är ju $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$ när $y \geq 0$.

5. Eftersom $p(1) = 0$ kan vi alltså inte tillämpa argumentprincipen på polynomet $p(z)$ längs Γ_R: argumenttillskottet för $p(z)$ längs Γ_R blir ju odefinierat (ty $1 \in \Gamma_R$, och $\arg 0$ är odefinierat).

   Många tror att det faktum att $p(z)$ är reellvärd när $z \in L_R^1$ medför att $\Delta_{L_R^1} \arg p(z) = 0$ (FEL); detta är sant endast om p dessutom saknar nollställen på L_R^1 (men $p(1) = 0$, som sagt).

   Man kan också parametrisera L_R^2 med t.ex. $z = t\,e^{i\pi/4}$, $t : 0 \to R$, och då förändras polynomen $u(t)$ och $v(t)$ något – nu blir $v = 0$ när $t = 2\sqrt{2}$ i stället – men i övrigt blir tabellen och skissen desamma.

6. (a) Detta är alltså i praktiken en Rouchéuppgift, och det förekommer ett antal ”klassiska” fel i lösningarna. Se kommentarerna till uppgift 3 på tentamen 2016-04-01 för en allmän diskussion.

   (b) Inget att kommentera.

7. Någon försökte bevisa påståendet genom att använda Cauchys integralsats på den hela funktionen f^2, men det leder ingen vart eftersom $dz = ire^{i\theta}d\theta$ (en komplex differential) vid parametriseringen $z = re^{i\theta}$, $t : -\pi \to \pi$, och att ta real- och imaginärdelar i den parametriserade integralen ger inte det önskade resultatet. (Detta försök till bevis använder inte heller villkoret på $f(0)$, och faktum är att $f(0)^2$ måste vara rent imaginär för att påståendet ska vara sant.)

Lars Alexandersson, 5 september 2017