Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA45
Provkod: TEN1

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2017-04-21 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. Bestäm alla hela analytiska funktioner $f = u + iv$ sådana att

$$v = \operatorname{Im} f = \cosh x \sin y + e^y \sin x + xy + 1.$$

   f skall uttryckas i variabeln z, alltså som $f(z)$.

2. Bestäm antalet nollställen som polynomet

$$p(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 6z + 1$$

   har i (a) cirkelskivan $|z| < 1/2$ (b) halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$. (1p+2p)

3. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)}$ med residykalkyl.

4. (a) Bestäm en Möbiusavbildning $w = S(z)$ som tar halvcirkelskivan $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ på kvadranten $\operatorname{Re} w > 0$, $\operatorname{Im} w > 0$ samtidigt som $S(-1) = 0$.

   (b) Bestäm en Möbiusavbildning $w = T(z)$ som tar halvplanet $\operatorname{Im} z > 0$ på cirkelskivan $|w| < 1$ samtidigt som $T(0) = 1$

   (c) Om S och T ovan är givna, bestäm med hjälp av dem en konform avbildning $w = U(z)$ som tar halvcirkelskivan $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ på cirkelskivan $|w| < 1$ samtidigt som $U(-1) = 1$.

   Deluppgift (c) kan alltså lösas även av den som inte har löst (a) och/eller (b).

5. Låt

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^{2n}} \qquad \text{och} \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n} z^n$$

   för de komplexa tal z där de respektive serierna konvergerar. Bestäm konvergensringen $R_1 < |z| < R_2$ för den första serien och konvergensskivan $|z| < R_3$ för den andra, och beräkna summorna $f(z)$ och $g(z)$ i dessa respektive områden; ange speciellt $f(i/\sqrt{3})$ och $g(2)$ i rektangulär form, om de existerar.

6. Låt $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, och antag att $f \in A(\mathbf{C}^*)$ är sådan att $f(1/n) = 0$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Visa med ett exempel att det inte behöver vara sant att $f = 0$ i hela $\mathbf{C}^*$. Varför strider inte detta mot entydighetssatsen för analytiska funktioner?

   Om man dessutom vet att f inte har väsentlig singularitet i origo, kan man då dra slutsatsen att $f = 0$ i hela $\mathbf{C}^*$? Bevis eller motexempel!

7. Låt Ω vara ett begränsat område i $\mathbf{C}$, och antag att f är en nollskild analytisk funktion i Ω med följande egenskap: För varje $z_0 \in \partial\Omega$ är det sant att $|f(z)| \to 1$ närhelst $z \to z_0$ inifrån Ω. Vad kan sägas om f?

TATA45 Komplex analys 2017-04-21, lösningsskisser

1. Cauchy-Riemanns ekvationer ger först $v'_y = \cosh x \cos y + e^y \sin x + x = u'_x$, som integrerad m.a.p. x ger $u = \sinh x \cos y - e^y \cos x + x^2/2 + \varphi(y)$, där φ är en reellvärd funktion av en reell variabel. Derivering m.a.p. y och insättning i $u'_y = -v'_x$ ger sedan $\varphi'(y) = -y$, alltså $\varphi(y) = -y^2/2 + A$, där A är en reell konstant. Vi får

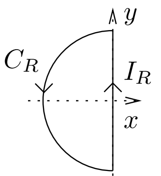
$$f = u + iv = (\sinh x \cos y - e^y \cos x + x^2/2 - y^2/2 + A) + i(\cosh x \sin y + e^y \sin x + xy + 1).$$

f är alltså en hel funktion, och på realaxeln $z = x$ sammanfaller den med den hela funktionen $g(z) = \sinh z - \cos z + z^2/2 + A + i \sin z + i$, som också kan skrivas $g(z) = \sinh z - e^{-iz} + z^2/2 + A + i$. Entydighetssatsen ger därför att $f(z) = g(z)$ överallt.

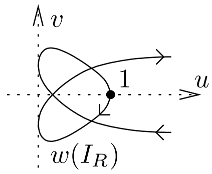
Svar: $f(z) = \sinh z - \cos z + z^2/2 + A + i \sin z + i = \sinh z - e^{-iz} + z^2/2 + A + i$, $A \in \mathbf{R}$.

2. (a) Sätt $f(z) = -6z$ och $g(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 1$. På cirkeln $|z| = 1/2$ är $|f(z)| = 6|z| = 3$ medan $|g(z)| = |z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 1| \leq |z|^4 + 3|z|^3 + 2|z|^2 + 1 = 31/16 < 3$, och därmed är $|f(z)| > |g(z)|$ på hela denna cirkel. Rouchés sats medför nu att $f(z) + g(z)$, d.v.s. $p(z)$, har lika många nollställen i cirkelskivan $|z| < 1/2$ som $f(z)$, alltså 1. Svar: Ett.

   (b) Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 6z + 1$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R + I_R$ (se figur nere till vänster). På C_R får vi tillskottet $\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^4 + \Delta_{C_R} \arg(1 - 3/z + 2/z^2 - 6/z^3 + 1/z^4) \to 4 \cdot \pi + 0 = 4\pi$ då $R \to \infty$. På I_R får vi $p(z) = p(iy) = (y^4 - 2y^2 + 1) + i(3y^3 - 6y) = (y^2 - 1)^2 + i3y(y^2 - 2) = u + iv$, $y : -R \to R$, och därmed nedanstående teckentabell då $y \geq 0$ (observera att u är jämn och v udda), samt kurva $w = p(z)$ då z genomlöper I_R:



y	0	$<$	1	$<$	$\sqrt{2}$	$<$
u (jämn)	1	+	0	+	+	+
v (udda)	0	−	−	−	0	+



   Dessutom får vi av gradskäl att $v/u \to 0$ då $y \to \pm\infty$ (u drar mer än v), och detta tillsammans med tabellen ovan ger skissen ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{I_R} \arg p(z) \to 0$ då $R \to \infty$. Eftersom poler saknas blir antalet nollställen i vänstra halvplanet därför $(1/2\pi) \lim_{R\to\infty}(\Delta_{C_R} \arg p(z) + \Delta_{I_R} \arg p(z)) = (4\pi + 0)/2\pi = 2$. Svar: Två.

3. Sätt $f(z) = 1/\big((z^2+1)^2(z^2+9)\big) = (z+i)^{-2}(z-i)^{-2}(z^2+9)^{-1}$; den sökta integralen är $I = \int_0^\infty f(x)\,dx$, och eftersom f är jämn är $I = (1/2)\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$. Studera nu konturen $\Gamma_R = L_R + C_R^+$, där L_R är sträckan från $-R$ till R och C_R^+ är halvcirkeln från R till $-R$ i övre halvplanet. Om R är stort nog ($R > 3$) är f analytisk på och innanför Γ_R utom i dubbelpolen $z = i$ och i enkelpolen $z = 3i$. Residysatsen och sedvanlig residyberäkning ger därför

$$\int_{L_R + C_R^+} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=3i} f(z)\right) = 2\pi i \left(\frac{d}{dz}\big((z+i)^{-2}(z^2+9)^{-1}\big)\Big|_{z=i} + \frac{(z^2+1)^{-2}}{\frac{d}{dz}(z^2+9)}\Big|_{z=3i}\right)$$

$$= 2\pi i \left(\big(-2(z+i)^{-3}(z^2+9)^{-1} - 2z(z+i)^{-2}(z^2+9)^{-2}\big)\Big|_{z=i} + \frac{(z^2+1)^{-2}}{2z}\Big|_{z=3i}\right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{3}{64 \cdot 2i} + \frac{1}{64 \cdot 6i}\right) = \frac{5\pi}{96}, \qquad R > 3. \qquad (*)$$

Vidare, $\int_{L_R} f(z)\,dz \to 2I$ då $R \to \infty$, och en ML-uppskattning ger

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2(R^2-9)} \to 0, \qquad R \to \infty,$$

så $\int_{C_R^+} f(z)\,dz \to 0$ då $R \to \infty$. Genom att låta $R \to \infty$ i $(*)$ får vi därför till sist $2I + 0 = 5\pi/96$, d.v.s. $I = 5\pi/192$.

Svar: $\dfrac{5\pi}{192}$.

4. (a) För att sträckan från $z = -1$ till $z = 1$ och halvcirkeln i övre halvplanet mellan samma punkter ska avbildas på två strålar från $w = 0$ måste $w(1) = \infty$, vid sidan av det i uppgiften givna kravet $w(-1) = 0$. Eftersom den räta skärningsvinkeln bevaras vid konform avbildning räcker det därför att t.ex. välja $w(0) = 1$ för att få rätt avbildning. De två tripplarna ger nu med standardmetoder $w = S(z) = (1 + z)/(1 - z)$.

   (b) Vi kompletterar kravet $w(0) = 1$, som innebär att en randpunkt går på en randpunkt, med par av spegelpunkter på båda sidor, t.ex. $w(i) = 0$ (inre punkter) och $w(-i) = \infty$; då vet vi att avbildningen blir rätt. På sedvanligt sätt får vi nu $w = T(z) = (i - z)/(i + z)$.

   (c) Eftersom avbildningen $w = z^2$ är tar kvadranten $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ konformt på halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$ och tar $z = 0$ på $w = 0$ kan vi m.h.a. S och T sätta $U(z) = T(S(z)^2)$ för att få den önskade avbildningen; notera speciellt att $U(-1) = T(S(-1)^2) = T(0^2) = T(0) = 1$.

   <u>Svar</u>: T.ex. $S(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, $T(z) = \dfrac{i-z}{i+z}$ och $U(z) = T\big(S(z)^2\big)$.

5. Med standardutvecklingar får vi $\operatorname{Log}(1 + w) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}w^n/n$ i skivan $|w| < 1$, som också är denna series konvergensskiva; dessutom är $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} w^n/n!$, och därmed $\sum_{n=1}^{\infty} w^n/n! = e^w - 1$, för alla $w \in \mathbf{C}$. Med $w = -z$ för $|z| < 1$ respektive $w = 1/z^2$ för $z \neq 0$ får vi därför genast

$$(*) \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^{2n}} = -\operatorname{Log}(1 - z) + \exp\Big(\frac{1}{z^2}\Big) - 1, \qquad 0 < |z| < 1.$$

$z = i/\sqrt{3}$ ligger i detta område, och direkt insättning ger $f(i/\sqrt{3}) = (-\ln(2/\sqrt{3}) + e^{-3} - 1) + i\pi/6$. Vidare, termvis derivering av $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1 - z)$ då $|z| < 1$, som också är denna series konvergensskiva, ger $\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = 1/(1 - z)^2$, så $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = z/(1 - z)^2$ då $|z| < 1$. Upprepar vi detta (derivering och sedan multiplikation med z) får vi först $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{n-1} = (1 + z)/(1 - z)^3$ och sedan $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = (z + z^2)/(1 - z)^3$, båda med konvergensskiva $|z| < 1$. Alltså,

$$(**) \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{z + z^2}{(1 - z)^3} - \operatorname{Log}(1 - z), \qquad |z| < 1.$$

Denna serie har konvergensradie 1, så för $z = 2$ är serien divergent, varför $g(2)$ är odefinierat.

<u>Svar</u>: Se $(*)$ och $(**)$ ovan; $f\big(\frac{i}{\sqrt{3}}\big) = \left(\frac{1}{e^3} - 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}\right) + i\frac{\pi}{6}$ medan $g(2)$ är odefinierat.

6. Som ett motexempel kan vi ta $f(z) = \sin(\pi/z)$; då är f analytisk i $\mathbf{C}^*$ och $f(1/n) = \sin(\pi n) = 0$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ Att detta inte är ett motexempel till entydighetssatsen för analytiska funktioner beror på att $1/n \to 0 \notin \mathbf{C}^*$ då $n \to \infty$, d.v.s. på att hopningspunkten inte tillhör området.

   Origo är en isolerad singularitet till f, så om f inte har väsentlig singularitet där har den antingen pol eller hävbar singularitet där, vilket innebär att funktionen $g(z) := z^N f(z)$ har hävbar singularitet i origo där $N \geq 0$ är polens ordning ($N = 0$ om f har hävbar singularitet i origo); vi kan därför definiera $g(0)$ så att g blir analytisk även i origo: $g \in A(\mathbf{C})$, således. Men $g(1/n) = f(1/n)/n^N = 0$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$, och $1/n \to 0 \in \mathbf{C}$ och *nu* kan vi använda entydighetssatsen, på $g \in A(\mathbf{C})$, och inser att $g = 0$ i hela $\mathbf{C}$ och därmed också att $f = 0$ i hela $\mathbf{C}^*$. <u>Svar</u>: T.ex. $f(z) = \sin(\pi/z)$; ja.

7. Sätt $\varphi(z) := |f(z)|$ för $z \in \Omega$ och $\varphi(z) := 1$ för $z \in \partial\Omega$. Enligt förutsättningarna är då φ en reellvärd kontinuerlig funktion på den kompakta mängden $\bar{\Omega}$, varför φ antar ett största värde i någon punkt $c \in \bar{\Omega}$. Vi delar nu upp i två fall:

   Om $c \in \Omega$ är $|f(z)| \leq |f(c)|$ för alla $z \in \Omega$, så maximumprincipen medför att f är konstant i Ω.

   Om $c \in \partial\Omega$ är $|f| \leq 1$ i Ω. Eftersom $f \neq 0$ enligt förutsättningarna är också $g := 1/f$ analytisk i Ω och $|g(z)| = 1/|f(z)| \to 1$ närhelst $z \to z_0$ och $z_0 \in \partial\Omega$. Vi kan därför upprepa resonemanget i första stycket, men med $\psi(z) := |g(z)|$ för $z \in \Omega$ och $\psi(z) := 1$ för $z \in \partial\Omega$, och inse att ψ antar ett största värde någonstans i $\bar{\Omega}$. Men $\psi = 1$ på $\partial\Omega$ medan $\psi \geq 1$ i Ω, så detta maximum antas någonstans i Ω. Som i andra stycket antar $|g|$ därför ett största värde i Ω, varför g, och därmed även f, är konstant i Ω.

   I båda fallen är alltså f konstant i Ω, och eftersom $|f(z)| \to 1$ närhelst $z \to z_0$ inifrån Ω för varje $z_0 \in \partial\Omega$ måste denna konstant vara något $\lambda \in \mathbf{C}$ sådant att $|\lambda| = 1$.

   <u>Svar</u>: Det finns något $\lambda \in \mathbf{C}$ med belopp 1 sådant att $f(z) = \lambda$ för alla $z \in \Omega$.

TATA45 Komplex analys 2017-04-21, kommentarer

1. Observera att den funktion $f(z)$ man får är analytisk, så svar som innehåller t.ex. $e^{\bar{z}}$ är orimliga.

   Några tar en onödigt jobbig väg och integrerar både $u'_x = v'_y$ (m.a.p. x) och $u'_y = -v'_x$ (m.a.p. y), och försöker sedan pussla ihop dessa båda uttryck för u till ett enda uttryck för u, oftast på mycket oklara sätt; framför allt framgår det normalt inte att man har hittat *alla* lösningar.

   Observera att integrationskonstanten $A \in \mathbf{R}$; u är ju en reellvärd funktion. Att skriva $A \in \mathbf{C}$, eller att sätta $\tilde{A} = A + i$ och sedan skriva $\tilde{A} \in \mathbf{C}$, ger för många lösningar (FEL).

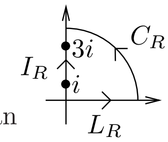
   Flera skriver $\cosh x = \cos ix$ och använder egenskaper för cos och sin, vilket i och för sig är OK, men det är enklare att använda att $(\cosh x)' = \sinh x$ och $(\sinh x)' = \cosh x$. Några tror för övrigt att $(\cosh x)' = -\sinh x$ (FEL).

   Flera försöker skriva om funktionen $f = u + iv$ från variablerna x och y till variabeln z utan att använda entydighetssatsen, vilket är fullt möjligt, men klart svårare. Risken är då också att man – efter att ha gjort något (litet?) fel – får kvar uttryck som innehåller $\bar{z}$, jfr första stycket.

2. (a) I denna Rouchéuppgift förekommer det ett antal ”klassiska” fel i lösningarna. Se kommentarerna till uppgift 3 på tentamen 2016-04-01 för en allmän diskussion.

   (b) Som vanligt går det bra att faktorisera endast en av u och v vid undersökningen längs imaginäraxeln, som i kompendiet.
   (I själva verket går kurvan $w(I_R)$ i w-planet i detta fall genom punkten $w = 1$ inte bara då $y = 0$, utan även då $y = \pm\sqrt{2}$; det framgår inte av min kurvskiss. Det spelar dock ingen roll eftersom det är bara är *tecknet* som är relevant.)

3. Integralen är tydligt positiv, så icke-reella svar eller reella svar ≤ 0 är orimliga.
   Överraskande många försöker använda konturen till höger, alltså

   $$\Gamma_R = L_R + C_R - I_R \qquad \text{(FUNGERAR INTE).}$$

   Notera att singulariteterna $z = i$ och $z = 3i$ ligger *på* konturen, och då kan residysatsen inte användas över huvud taget.
   Många gör fel vid beräkningen av residyn i dubbelpolen $z = i$, och tror att

   $$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+9)} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2+9}\right)_{\big|z=i} \qquad \text{(FEL)},$$

   som om man bara kunde ta bort den ”farliga” faktorn $(z^2+1)^2$ i nämnaren. I själva verket måste man ju skriva $f(z)$ i formen

   $$f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^2}, \qquad \text{och här blir således} \qquad g(z) = \frac{1}{(z+i)^2(z^2+9)} = (z+i)^{-2}(z^2+9)^{-1},$$

   och vi får att $\operatorname{Res}_{z=i} = g'(i)$, som i lösningsskissen.

4. (a) Det är alltså *nödvändigt* att $w(1) = \infty$ för att bilden ska bli ett kvartsplan. Det är också *tillräckligt*, tack vare konformiteten, eftersom den räta skärningsvinkeln vid $z = -1$, till storlek och orientering, bevaras vid $w = 0$, och området till vänster avbildas på området till vänster. Därför räcker det att komplettera $w(-1) = 0$ och $w(1) = \infty$ med t.ex. $w(0) = 1$, som i lösningsskissen, eller $w(i) = i$, för den delen. *Alla* möjliga lösningar får vi för övrigt genom att låta $w(0) = a$ för något $a > 0$, och då blir

   $$w = S(z) = a \cdot \frac{1+z}{1-z}, \qquad a > 0, \qquad \text{men det efterfrågas inte i uppgiften.}$$

   Några har kompletterat på annat sätt, typiskt med $w(i) = 1$ (FEL) eller med $w(0) = i$ (FEL); då blir bilden i stället *fjärde* kvadranten $\operatorname{Re} w > 0$, $\operatorname{Im} w < 0$ respektive *andra* kvadranten $\operatorname{Re} w < 0$, $\operatorname{Im} w > 0$.
   Åter andra använder inte att $w(1) = \infty$ över huvud taget utan försöker med andra punkter. Då är det inte längre självklart att bilden blir en kvadrant, utan det måste motiveras noggrant. Om t.ex. $(-1, 0, i) \mapsto (0, 1, i)$ råkar det bli rätt (men det är inte uppenbart varför), men om t.ex. $(-1, 0, i) \mapsto (0, 2, i)$ blir det fel!

(b) Här har de flesta använt spegelpunktsresonemang, vilket är enkelt och bra.

Några har i stället avbildat tre punkter på realaxeln på tre punkter på enhetscirkeln, typiskt $(0, 1, \infty) \mapsto (1, i, -1)$, och då vet man ju att realaxeln $\operatorname{Im} z = 0$ avbildas på enhetscirkeln $|w| = 1$. Man får då inte glömma att motivera varför övre halvplanet $\operatorname{Im} z > 0$ avbildas på skivan $|w| < 1$ och inte på området $|w| > 1$. Det kan man som bekant göra genom att visa att någon inre punkt avbildas på någon inre punkt, eller genom att hänvisa till att området till vänster avbildas på området till vänster, relativt orienteringen.

(c) Här har de allra flesta trott att $U(z) = T(S(z))$ duger (FEL), men i så fall blir även $U(z)$ en Möbiusavbildning, och en sådan kan aldrig avbilda en halv cirkelskiva på en hel cirkelskiva: De båda räta vinklarna på randen till området i z-planet måste i så fall avbildas på räta vinklar på randen till området i w-planet, men där finns ju inga räta vinklar.

5. Inget att kommentera.

6. Om f inte har väsentlig singularitet i origo kan man alternativt resonera som följer.

   - Om f har pol i origo vet vi att $|f(z)| \to +\infty$ då $z \to 0$, och speciellt finns det därför något $\delta > 0$ sådant att $f(z) \neq 0$ för alla z sådana att $0 < |z| < \delta$. Men om n är ett heltal som är så stort att $n > 1/\delta$ är $f(1/n) = 0$ trots att $0 < |1/n| < \delta$, en motsägelse.
   - I det återstående fallet har f hävbar singularitet i origo, och då kan man följa lösningsskissen, med $N = 0$.

7. Observera att det inte förutsätts i uppgiften att f är definierad på randen $\partial\Omega$. Man kan alltså inte använda maximumprincipen i begränsade områden, eftersom den förutsätter att f är analytisk i Ω och kontinuerlig på $\bar{\Omega}$.

Lars Alexandersson, 2 maj 2017