Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA45
Provkod: TEN1

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2017-01-14 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. Låt C vara cirkeln $|z| = 2$ tagen ett varv i positiv led. Beräkna
$$\int_C \frac{e^{\pi z}}{z^4 + 2iz^3 + 3z^2}\, dz.$$

2. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som tar cirkeln $|z + 2i| = \sqrt{8}$ på imaginäraxeln $\operatorname{Re} w = 0$ samtidigt som $w(0) = 5$ och $w(2) = 0$. Bestäm sedan den mängd i z-planet som avbildas på realaxeln $\operatorname{Im} w = 0$ i w-planet.

3. Bestäm termerna till och med grad 3 i Maclaurinserien för
$$f(z) = \frac{\cosh z}{\cos z + \sin z}$$
och bestäm seriens konvergensskiva $|z| < R$. Ange också $\operatorname*{Res}_{z=0} \big(f(z)/z^4\big)$.

4. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^5 + 4z^3 + z^2 + 3z + 2$$
har i fjärde kvadranten $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$.

5. Låt $0 < \alpha < \pi/2$ vara en given vinkel och sätt $\lambda = e^{i\alpha}$. Beräkna integralen
$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-\lambda t}}{t}\, dt$$
genom att integrera funktionen $f(z) = e^{-z}/z$ längs randen till den indragna tårtbiten $\epsilon \le |z| \le R$, $0 \le \operatorname{Arg} z \le \alpha$ och göra en gränsövergång.

6. (a) Definiera vad som menas med en gren till en flervärd funktion i ett område.
   (b) Låt Ω vara $\mathbf{C}$ med kurvan $y = \sin x$, $x \ge 0$, borttagen, och låt $f(z)$ vara den gren till $z^{1/2}$ i Ω för vilken $f(-1) = -i$. Beräkna $f(3 - 4i)$ samt $f'(1)$ och $f'(4)$. Svaren skall ges i rektangulär form, alltså i formen $a + ib$ där $a, b \in \mathbf{R}$.

7. Undersök om det till varje $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ finns ett polynom $p_n(z)$ sådant att
$$\max_{|z|=1} \left| \frac{1}{z} - p_n(z) \right| < \frac{1}{n}.$$
Bestäm i så fall en sådan följd av polynom $p_1(z), p_2(z), p_3(z), \ldots$ eller visa att följden inte existerar.

TATA45 Komplex analys 2017-01-14, lösningsskisser

1. Innanför $C: |z| = 2$ har $f(z) = e^{\pi z}/\big(z^2(z^2+2iz+3)\big)$ dubbelpolen $z = 0$ och enkelpolen $z = i$; notera att singulariteten $z = -3i$ ligger utanför C. Vi får residyerna

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{\pi z}}{z^2+2iz+3}\right)\Big|_{z=0} = \frac{\pi e^{\pi z}}{z^2+2iz+3} - \frac{e^{\pi z}(2z+2i)}{(z^2+2iz+3)^2}\Big|_{z=0} = \frac{\pi}{3} - \frac{2i}{9}$$

och

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{e^{\pi z}/z^2}{\frac{d}{dz}(z^2+2iz+3}\Big|_{z=i} = \frac{e^{\pi z}/z^2}{2z+2i}\Big|_{z=i} = \frac{1}{4i},$$

så residysatsen ger

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2i}{9} + \frac{1}{4i}\right) = \frac{17\pi}{18} + \frac{2\pi^2}{3}\,i.$$

2. Att $w(0) = 5$ ger med nödvändighet $w(2i) = -5$, eftersom 0 och $2i$ är spegelpunkter m.a.p. cirkeln $|z+2i| = \sqrt{8}$, och 5 och -5 är spegelpunkter m.a.p. linjen $\operatorname{Re} w = 0$ (rita figurer!). Kravet $w(2) = 0$ innebär att randpunkten $z = 2$ avbildas på randpunkten $w = 0$, och därmed kommer Möbiusavbildningen som bestäms entydigt av dessa tre punktpar att avbilda som önskat. Vi får med standardmetoder $w(z) = (10-5z)/\big((1+2i)z+2\big)$.

Låt Γ_w vara realaxeln $\operatorname{Im} w = 0$ i w-planet och Γ_z den $\hat{\mathbf{C}}$-cirkel i z-planet som avbildas på Γ_w under $w(z)$ ovan. Eftersom z-trippeln $(2i, 2, 0)$ avbildas på w-trippeln $(-5, 0, 5)$, och dessa tre w-punkter ligger på Γ_w, kommer den entydigt bestämda $\hat{\mathbf{C}}$-cirkel som innehåller de tre z-punkterna att avbildas på Γ_w och därmed vara den sökta $\hat{\mathbf{C}}$-cirkeln Γ_z. En enkel figur visar att Γ_z är cirkeln $|z-(1+i)| = \sqrt{2}$.

<u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{10-5z}{(1+2i)z+2}$; cirkeln $|z-(1+i)| = \sqrt{2}$.

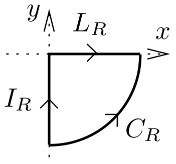
3. Nämnaren $\cos z + \sin z = 0 \Leftrightarrow (e^{iz}+e^{-iz})/2 + (e^{iz}-e^{-iz})/2i = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = -i \Leftrightarrow 2iz = \log(-i) = -i\pi/2 + i2n\pi \Leftrightarrow z = -\pi/4 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. I dessa (reella) punkter är täljaren $\cosh z \neq 0$, så f har poler i alla dessa punkter men är analytisk för övrigt. Maclaurinserien för f konvergerar därför i skivan $|z| < R$, där R är avståndet till närmaste pol från origo sett, $-\pi/4$, så $R = \pi/4$.

Ansatsen $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4)$ ger efter multiplikation med $\cos z + \sin z = 1 + z - z^2/2 - z^3/6 + \mathcal{O}(z^4)$ och jämförelse med $\cosh z = 1 + z^2/2 + \mathcal{O}(z^4)$ sambanden $c_0 = 1$, $c_0 + c_1 = 0$, $-c_0/2 + c_1 + c_2 = 1/2$, $-c_0/6 - c_1/2 + c_2 + c_3 = 0$, d.v.s. $c_0 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -7/3$, så $f(z) = 1 - z + 2z^2 - 7z^3/3 + \mathcal{O}(z^4)$.

Slutligen, $f(z)/z^4 = 1/z^4 - 1/z^3 + 2/z^2 - (7/3)/z + \mathcal{O}(1)$ då $0 < |z| < \pi/4$, så $\operatorname*{Res}_{z=0}\big(f(z)/z^4\big) = -7/3$.

<u>Svar</u>: $f(z) = 1 - z + 2z^2 - 7z^3/3 + \mathcal{O}(z^4)$; $R = \pi/4$; $\operatorname*{Res}_{z=0}\big(f(z)/z^4\big) = -7/3$.

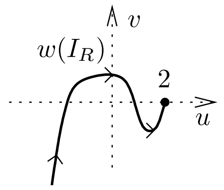
4. Studera argumenttillskottet för $p(z) = z^5 + 4z^3 + z^2 + 3z + 2$ när z genomlöper den positivt orienterade konturen $\Gamma_R = C_R - L_R - I_R$ (se figur nedan till vänster). Vi får att $\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^5 + \Delta_{C_R} \arg(1 + 4/z^2 + 1/z^3 + 3/z^4 + 2/z^5) \to 5 \cdot \pi/2 + 0 = 5\pi/2$ då $R \to \infty$. På L_R är $p(z) = p(x) = x^5 + 4x^3 + x^2 + 3x + 2$, där $x: 0 \to R$; således är $p(z)$ reellt och ≥ 2 där, så trivialt är $\Delta_{L_R} \arg p(z) = 0$ för alla $R > 0$. På I_R är $p(z) = p(iy) = (-y^2+2) + i(y^5 - 4y^3 + 3y) = (-y^2+2) + i\,y(y^2-1)(y^2-3) = u + iv$, där $y: -R \to 0$. Vi får nedanstående teckentabell, och vi noterar också att $u/v \to 0$ då $y \to -\infty$ av gradskäl, så v drar mer än u.



$\Gamma_R = C_R - L_R - I_R$

I_R:

y	$<$	$-\sqrt{3}$	$<$	$-\sqrt{2}$	$<$	-1	$<$	0
u	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	2
v	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0



Från figuren ovan till höger ser vi att $\Delta_{I_R} \arg p(z) \to -3\pi/2$ då $R \to \infty$, och eftersom poler saknas medför argumentprincipen att antalet nollställen för p i fjärde kvadranten är

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_R} \arg p(z) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\Delta_{C_R - L_R - I_R} \arg p(z) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{5\pi}{2} - 0 - \big(-\frac{3\pi}{2}\big)\right) = 2.$$ <u>Svar</u>: Två.

5. Fixera $\alpha \in]0, \pi/2[$ och låt $\Gamma_{\epsilon,R} = L^1_{\epsilon,R} + C_R + L^2_{\epsilon,R} + C_\epsilon$ vara randen till den indragna tårtbiten genomlöpt i positiv led (rita figur!). Eftersom $f(z) = e^{-z}/z$ är singulär endast i origo ger Cauchys integralsats

$$(*) \qquad \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z)\,dz = 0.$$

Vi parametriserar sträckan $L^1_{\epsilon,R}$ på positiva realaxeln med $z = t$, $t : \epsilon \to R$, och sträckan $L^2_{\epsilon,R}$ på strålen $\operatorname{Arg} z = \alpha$ med $z = e^{i\alpha} t = \lambda t$, $t : R \to \epsilon$, och får

$$\int_{L^1_{\epsilon,R}} f(z)\,dz + \int_{L^2_{\epsilon,R}} f(z)\,dz = \int_\epsilon^R \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \int_R^\epsilon \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda t}\,\lambda\,dt = \int_\epsilon^R \frac{e^{-t} - e^{-\lambda t}}{t}\,dt.$$

Vidare, eftersom $|e^{-z}| = e^{-x} \le e^{-R\cos\alpha}$ på C_R och $\cos\alpha > 0$ ger ML-uppskattning

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \frac{e^{-R\cos\alpha}}{R} \cdot \alpha R = \alpha\, e^{-R\cos\alpha} \to 0, \qquad R \to \infty,$$

så $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ då $R \to \infty$. Notera också att f har enkelpol med residyn 1 i origo, så $f(z) = 1/z + g(z)$ för en funktion g som är analytisk i origo, varför

$$\int_{C_\epsilon} f(z)\,dz = \int_{C_\epsilon} \frac{1}{z}\,dz + \int_{C_\epsilon} g(z)\,dz = -i\alpha + \int_{C_\epsilon} g(z)\,dz \to -i\alpha + 0, \qquad \epsilon \to 0^+,$$

ty $\int_{C_\epsilon} (1/z)\,dz = \big[\operatorname{Log} z\big]_{\lambda\epsilon}^{\epsilon} = (\ln\epsilon) - (\ln\epsilon + i\alpha) = -i\alpha$, och $\int_{C_\epsilon} g(z)\,dz \to 0$ eftersom g är begränsad nära origo och längden av C_ϵ går mot noll.

Låt nu $R \to \infty$ och $\epsilon \to 0^+$ i $(*)$. Vi får $I(\alpha) + 0 + (-i\alpha) = 0$, d.v.s. $I(\alpha) = i\alpha$.

<u>Svar</u>: $I(\alpha) = i\alpha$.

6. (a) Se Definition 2.5 i kompendiets upplaga 2015 (och 2014).

(b) Låt $\widetilde{\log} z = \ln|z| + i\,\theta(z)$, där $\theta(z)$ ett ett kontinuerligt varierande argument för z i Ω och $\theta(-1) = \pi$ (rita figur över Ω); $\widetilde{\log} z$ är då *en* gren till $\log z$ i Ω, och *alla* grenar till $\log z$ i Ω ges av $\widetilde{\log} z + i2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Varje gren $f(z)$ till $z^{1/2}$ i Ω kan därför skrivas

$$f(z) = \exp\big((\widetilde{\log} z + i2n\pi)/2\big) = (-1)^n \exp\big((\widetilde{\log} z)/2\big) = \pm\exp\big((\widetilde{\log} z)/2\big),$$

alltså totalt två olika grenar. Kravet $f(-1) = -i$ ger nu, eftersom $\widetilde{\log}(-1) = i\,\theta(-1) = i\pi$ och $\exp(i\pi/2) = i$, att tecknet "$-$" måste väljas för $f(z)$ ovan. Således är

$$f(z) = -\exp\big((\widetilde{\log} z)/2\big), \qquad \text{och därmed är} \qquad f'(z) = -\exp\big((\widetilde{\log} z)/2\big) \cdot \frac{1}{2z} = \frac{f(z)}{2z}.$$

Sätt $w = f(3-4i)$. Vi konstaterar först att $w^2 = 3-4i$, och med $w = u+iv$ får vi på sedvanligt sätt (via $u^2 - v^2 = 3$ och $2uv = -4$) att antingen är $w = 2-i$ eller så är $w = -2+i$. Låt $\theta_0 = \theta(3-4i)$. Notera att $\pi < \theta_0 < 2\pi$, så $\exp(i\theta_0/2)$ ligger i andra kvadranten och därmed ligger $w = -\sqrt{5}\exp(i\theta_0/2)$ i fjärde kvadranten; alltså är $w = 2 - i$.

Slutligen ser vi i figuren att $\theta(1) = 2\pi$ och $\theta(4) = 0$, varför $f(1) = 1$ och $f(4) = -2$, och därmed är $f'(1) = 1/(2\cdot 1) = 1/2$ och $f'(4) = (-2)/(2\cdot 4) = -1/4$.

<u>Svar</u>: $f(3-4i) = 2-i$, $f'(1) = 1/2$, $f'(4) = -1/4$.

7. Låt $p(z)$ vara ett polynom. När $|z| = 1$ är $|1/z - p(z)| = |1 - z\,p(z)|/|z| = |1 - z\,p(z)| = |q(z)|$, där vi har satt $q(z) = 1 - z\,p(z)$; notera att q är ett polynom. Vi får därför

$$\max_{|z|=1}\left|\frac{1}{z} - p(z)\right| = \max_{|z|=1}|q(z)| \overset{*}{=} \max_{|z|\le 1}|q(z)| \ge |q(0)| = 1,$$

där steg $*$ är maximumprincipen tillämpad på q. Eftersom $1/n \le 1$ för alla $n \in \{1,2,3,\ldots\}$ kan det inte finnas något enda polynom $p_n(z)$ sådant att $\max_{|z|=1}\big|1/z - p_n(z)\big| < 1/n$, långt mindre en följd av sådana polynom.

<u>Svar</u>: Någon sådan följd existerar inte.

TATA45 Komplex analys 2017-01-14, kommentarer

1. Det går också bra att beräkna residyn i $z = i$ genom att använda den fullständiga faktoriseringen $z^4 + 2iz^3 + 3z^2 = z^2(z + 3i)(z - i)$ så att, med $g(z) = e^{\pi z}/\big(z^2(z + 3i)\big)$ som är analytisk i $z = i$,

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{\pi z}/\big(z^2(z+3i)\big)}{z-i} = \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{g(z)}{z-i} = g(i) = \frac{e^{\pi z}}{z^2(z+3i)}\Big|_{z=i} = \frac{1}{4i}.$$

   Vid beräkningen av residyn i dubbelpolen $z = 0$ var det några som inte skrev ner vad derivatan av $e^{\pi z}/(z^2 + 2iz + 3)$ blir, uttryckt i z. Tänk på att *fullständiga lösningar* krävs.

2. I uppgiften var det alltså enkelt att se, rent geometriskt, att cirkeln $\Gamma_z : |z-(1+i)| = \sqrt{2}$ avbildas på realaxeln Γ_w i w-planet. Alternativt kan man resonera så här: $z = \infty$ avbildas på $w = -1+2i \notin \Gamma_w$, så Γ_z är en vanlig cirkel $|z - c| = r$. Eftersom spegelpunkten till $w = -1 + 2i$ m.a.p. Γ_w är $w = -1 - 2i$ och spegelpunkten till $z = \infty$ m.a.p. Γ_z är $z = c$ får vi ekvationen $w(c) = -1 - 2i$, med lösningen $c = 1 + i$. Vidare, eftersom t.ex. $w(0) = 5 \in \Gamma_w$ och därmed $z = 0 \in \Gamma_z$ får vi $r = |0 - (1 + i)| = \sqrt{2}$. (Många bestämde t.o.m. inversen: $z(w) = (10 - 2w)/\big((1 + 2i)w + 5\big)$.)

   Några använder inte spegelpunkten till $z = 0$ som tredje punkt utan chansar med $w(-2) = \infty$ eller $w(-2) = i$ eller liknande. Detta ger inte rätt avbildning, och även om det skulle råka göra det måste det i så fall motiveras ($w(-2) = 5i$ råkar ge rätt avbildning i detta fall).

3. I ansatsen måste ordotermen skrivas ut; att skriva $f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3$ är FEL – i så fall vore ju $f(z)$ ett polynom.

   En handfull personer har, när de har löst ekvationen $\cos z + \sin z = 0$, fått $z = 3\pi/4 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, vilket är rätt, men tror sedan att $z = 3\pi/4$ är den punkt som ligger närmast origo (FEL); närmast origo är $z = -\pi/4$, vilket svarar mot $n = -1$.

4. Som vanligt går det bra att faktorisera endast en av u och v (enklast här: u) vid undersökningen längs negativa imaginäraxeln, som i kompendiet.

   Då får man tabellen intill, och tillsammans med att $u/v \to 0$ då $y \to -\infty$ ger den en kurvskiss där man ser att $\Delta_{I_R} \arg p(z) \to -3\pi/2$ då $R \to \infty$, som förut.

   I_R:

y	$-\infty$	$<$	$-\sqrt{2}$	$<$	0
u	$-$	$-$	0	$+$	2
v	$-$	?	$+$	?	0

   Flera har ritat hur *hela* imaginäraxeln avbildas, alltså inte bara delen $y \leq 0$. Gör man det måste det tydligt framgå vilken del av kurvan som kommer från delen $y \leq 0$.

   Vid undersökningen längs positiva realaxeln måste man påpeka att $u \geq 2$ (eller $u > 0$) då $x \geq 0$, vid sidan av att $v = 0$; att bara säga att $p(x)$ är reellt räcker inte eftersom det är viktigt att $p(x) \neq 0$ för $x \geq 0$.

5. Det går också bra att beräkna $\int_{C_\epsilon} (1/z)\, dz$ genom parametrisering, typiskt $z = \epsilon\, e^{i\theta}$, $\theta : \alpha \to 0$, och få $\int_{C_\epsilon} (1/z)\, dz = \int_\alpha^0 i\, d\theta = -i\alpha$.

   Några har sagt att $\int_{C_R} (e^{-z}/z)\, dz \to 0$ då $R \to \infty$ p.g.a. Jordans lemma, men det är inte uppenbart utan måste motiveras. Ett specialfall av Jordans lemma är att $\int_{C_R^+} |e^{iz}|\, |dz|$ är begränsad ($\leq \pi$) för alla $R > 0$ om C_R^+ är (en del av) halvcirkeln från R till $-R$ i övre halvplanet. Ska man använda Jordans lemma måste man i så fall byta integrationsvariabel $z = -is$, d.v.s. $s = iz$, varigenom cirkelbågen C_R från R till $Re^{i\alpha}$ i första kvadranten i z-planet övergår i cirkelbågen C_R^+ från Ri till $Rie^{i\alpha}$ i andra kvadranten i s-planet, och $\int_{C_R} (e^{-z}/z)\, dz = \int_{C_R^+} (e^{is}/s)\, ds$; denna senare integral kan man tackla med Jordans lemma.

6. Några har, med $v = \arctan(4/3)/2$, fått $f(3 - 4i) = \sqrt{5}\,(\cos v - i \sin v)$, vilket är rätt och i rektangulär form (och kraftigt förenklat blir $2 - i$).

7. Inget att kommentera.

Lars Alexandersson, 24 januari 2017