Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA45
Provkod: TEN1

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2016-08-25 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. Beräkna alla värden – och ange antalet olika värden – för var och en av

$$(i^6)^{1/3}, \qquad (-1)^{-i/\pi} \qquad \text{och} \qquad 1^{1/2} + 1^{1/4}.$$

Värdena skall anges i rektangulär form, alltså i formen $a + ib$ där $a, b \in \mathbf{R}$.

2. Bestäm antalet nollställen som polynomet

$$p(z) = z^4 + iz^3 - 10z^2 - 4iz + 9$$

har i övre halvplanet $\operatorname{Im} z > 0$.

3. Beräkna med residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2i)^3}.$$

4. Antag att α är ett reellt tal sådant att $0 < \alpha < 1$. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar cirkeln $|z| = 1$ på cirkeln $|w| = 1$ samtidigt som $w(\alpha) = 0$. Bestäm sedan alla α av ovanstående typ som är sådana att imaginäraxeln i z-planet avbildas på någon cirkel med radie 1 i w-planet.

5. (a) Formulera maximumprincipen i begränsade områden.

   (b) Bestäm maximum av

   $$\left|(z-1)e^z\right|$$

   på den slutna cirkelskivan $|z| \le 1$. Ange också i vilka punkter maximum antas.

6. Beräkna

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(\theta + ia)\, d\theta, \qquad a \text{ reellt} \neq 0.$$

7. Låt Ω vara ett område i $\mathbf{C}$ som är symmetriskt med avseende på realaxeln $\mathbf{R}$ (vilket betyder att $z \in \Omega \Leftrightarrow \bar{z} \in \Omega$). Antag att $f \in A(\Omega)$ och att f är reellvärd på $\Omega \cap \mathbf{R}$. Visa att

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}), \qquad z \in \Omega.$$

(Att visa påståendet i specialfallet $\Omega = \mathbf{C}$ ger 1p.)

TATA45 Komplex analys 2016-08-25, lösningsskisser

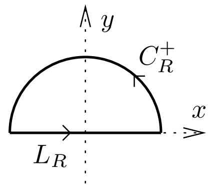
1. $(i^6)^{1/3} = (-1)^{1/3} = \exp\big((1/3)\log(-1)\big) = \exp\big((i\pi + i2n\pi)/3\big)$, $n \in \mathbf{Z}$, som ger de tre olika värdena $\exp(-i\pi/3) = (1 - i\sqrt{3})/2$, $\exp(i\pi/3) = (1 + i\sqrt{3})/2$ och $\exp(i\pi) = -1$.

   $(-1)^{-i/\pi} = \exp\big((-i/\pi)\log(-1)\big) = \exp\big((-i/\pi)(i\pi + i2n\pi)\big) = \exp(1 + 2n)$, $n \in \mathbf{Z}$, alla olika, d.v.s. oändligt många olika värden.

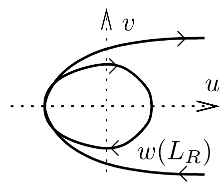
   $1^{1/2} + 1^{1/4} = \exp\big((1/2)\log 1\big) + \exp\big((1/4)\log 1\big) = \exp(im\pi) + \exp(in\pi/2)$, $m, n \in \mathbf{Z}$, som p.g.a. periodiciteterna endast kan ge olika värden för $m = 0, 1$ och $n = 0, 1, 2, 3$, d.v.s. högst åtta olika värden. Insättning ger värdena 2, $1 + i$, 0, $1 - i$, 0 (igen), $-1 + i$, -2 och $-1 - i$, alltså sju olika värden.

   Svar: $(1 \pm i\sqrt{3})/2$ och -1 (tre olika);
   $\exp(1 + 2n)$, $n \in \mathbf{Z}$ (oändligt många olika);
   ± 2, $1 \pm i$, $-1 \pm i$ och 0 (sju olika).

2. Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^4 + iz^3 - 10z^2 - 4iz + 9$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R^+ + L_R$ (se figur nere till vänster). På C_R^+ får vi tillskottet $\Delta_{C_R^+} \arg p(z) = \Delta_{C_R^+} \arg z^4 + \Delta_{C_R^+} \arg\big(1 + i/z - 10/z^2 - 4i/z^3 + 9/z^4\big) \to 4 \cdot \pi + 0 = 4\pi$ då $R \to \infty$. På L_R får vi $p(z) = p(x) = (x^4 - 10x^2 + 9) + i(x^3 - 4x) = u + iv$, där $u = (x^2 - 9)(x^2 - 1)$ och $v = x(x^2 - 4)$, och därmed nedanstående teckentabell då $x \geq 0$ (observera att u är jämn och v udda) samt kurva $w = p(z)$ då z genomlöper L_R:



x	0	<	1	<	2	<	3	<
u (jämn)	+	+	0	−	−	−	0	+
v (udda)	0	−	−	−	0	+	+	+



   Dessutom får vi av gradskäl att $v/u \to 0$ då $x \to \pm\infty$ (u drar mer än v), och detta tillsammans med tabellen ovan ger figuren ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{L_R} \arg p(z) \to -4\pi$ då $R \to \infty$. Antalet nollställen i övre halvplanet blir därför $(1/2\pi)\lim_{R\to\infty}\big(\Delta_{C_R^+} \arg p(z) + \Delta_{L_R} \arg p(z)\big) = (4\pi - 4\pi)/2\pi = 0$, eftersom poler saknas.

   Svar: Noll.

3. Sätt $f(z) = 1/(z^2 + 2i)^3$. Eftersom ekvationen $z^2 = -2i$ har rötterna $\pm(1 - i)$ får vi faktoriseringen $f(z) = (z - 1 + i)^{-3}(z + 1 - i)^{-3}$. Sökt integral är $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$. f är analytisk utom i polerna $\pm(1 - i)$, som har ordning 3. Låt L_R vara sträckan från $-R$ till R och låt C_R^+ vara halvcirkeln från R till $-R$ i övre halvplanet (rita figur!). Om R är stort nog ($R > \sqrt{2}$) medför residysatsen (eller Cauchys integralformel för derivata) att

$$(*) \quad \int_{L_R + C_R^+} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1+i} f(z) = 2\pi i \, \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2}(z - 1 + i)^{-3}\Big|_{z=-1+i} = \pi i \frac{(-3)(-4)}{(-2 + 2i)^5} = \frac{3\pi}{64}(-1 + i).$$

   Vidare, eftersom $|z^2 + 2i| \geq |z|^2 - |2i| = R^2 - 2 > 0$ på C_R^+ om R är tillräckligt stort får vi ML-uppskattningen

$$\left| \int_{C_R^+} f(z)\,dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2 - 2)^3} \to 0 \quad \text{då } R \to \infty.$$

   Dessutom ser vi att $\int_{L_R} f(z)\,dz \to I$ då $R \to \infty$, så gränsövergång i $(*)$ ger slutligen att $I + 0 = 3\pi(-1 + i)/64$.

   Svar: $\dfrac{3\pi}{64}(-1 + i)$.

4. Låt C vara cirkeln $|z| = 1$ och $\tilde{C}$ cirkeln $|w| = 1$. Att $w(\alpha) = 0$ ger med nödvändighet att $w(1/\alpha) = \infty$, ty α och $1/\alpha$ är spegelpunkter m.a.p. C (notera att $\alpha \in \mathbf{R}$) och 0 och ∞ är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{C}$. För att C skall avbildas på $\tilde{C}$ är det nu nödvändigt och tillräckligt att någon punkt på C avbildas på någon punkt på $\tilde{C}$, och den frihet man har är att $w(1) = \lambda$ för något λ med $|\lambda| = 1$.

Med givet λ blir Möbiusavbildningen entydigt bestämd: $w(z) = \lambda(z-\alpha)/(1-\alpha z)$. **Obs!** För att lösa uppgiften räcker det att bestämma *en* sådan avbildning, t.ex. $w(z) = i(z-\alpha)/(1-\alpha z)$.

Låt I vara imaginäraxeln $\operatorname{Re} z = 0$ i z-planet. Eftersom $w(1/\alpha) = \infty$ och $1/\alpha \notin I$ är bilden $\tilde{I}$ i w-planet en vanlig cirkel $|w-c| = r$. Centrum $c = w(-1/\alpha) = -\lambda(\alpha + 1/\alpha)/2$, ty $1/\alpha$ och $-1/\alpha$ är spegelpunkter m.a.p. I och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{I}$. Vidare, t.ex. $0 \in I$ så $w(0) = -\lambda\alpha \in \tilde{I}$, och därmed är radien $r = |-\lambda\alpha + \lambda(\alpha + 1/\alpha)/2| = (1/\alpha - \alpha)/2$; vi får därför att $r = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{2} - 1$ (oberoende av val av λ), eftersom $0 < \alpha < 1$.

<u>Svar</u>: t.ex. $w(z) = i\dfrac{z-\alpha}{1-\alpha z}$ (alla ges av $w(z) = \lambda\dfrac{z-\alpha}{1-\alpha z}$, $|\lambda| = 1$); $\alpha = \sqrt{2} - 1$ (entydigt).

5. (a) Om Ω är ett begränsat område och f är analytisk i Ω och kontinuerlig på $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, så antar $|f|$ sitt största värde på randen $\partial\Omega$.

   (b) Sätt $f(z) = (z-1)e^z$ och $\varphi(z) = |f(z)|^2$; då är f hel analytisk och $\varphi(z) = (x^2+y^2-2x+1)e^{2x}$. Enligt maximumprincipen i begränsade områden räcker det att undersöka randen $|z| = 1$ för att hitta maximum av $|f(z)|$ på den kompakta skivan $|z| \le 1$, och eftersom f inte är konstant kan maximum av $|f(z)|$ inte antas i någon inre punkt, enligt (den vanliga) maximumprincipen. På randen $|z| = 1$ är $x^2 + y^2 = 1$ och därmed är $\varphi(z) = (2-2x)e^{2x}$ där. Optimering av $g(x) := (2-2x)e^{2x}$ för $-1 \le x \le 1$ ger med elementära envariabelmetoder $g_{\max} = g(1/2) = e$ och därmed är $|f|_{\max} = |f(1/2 \pm i\sqrt{3}/2)| = \sqrt{e}$.

   <u>Svar</u>: Maximum $= \sqrt{e}$, och det antas i punkterna $1/2 \pm i\sqrt{3}/2$.

6. Sätt $w = \theta + ia$ och $b = e^{2a}$; eftersom a är reellt och $a \neq 0$ är $b > 0$ och $b \neq 1$, och

$$\tan w = \frac{(e^{iw} - e^{-iw})/2i}{(e^{iw} + e^{-iw})/2} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2i\theta}e^{-2a} - 1}{e^{2i\theta}e^{-2a} + 1} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2i\theta} - b}{e^{2i\theta} + b},$$

så med $z = e^{i2\theta}$ får vi, där C är den positivt orienterade enhetscirkeln $|z| = 1$ tagen ett varv,

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(\theta + ia)\, d\theta = \int_C \frac{1}{i} \cdot \frac{z-b}{z+b} \cdot \frac{dz}{2iz} = -\frac{1}{2}\int_C \frac{z-b}{(z+b)z}\, dz.$$

Integranden är singulär i enkelpolerna $z = 0$ och $z = -b$. Vidare ligger polen $z = -b$ aldrig *på* cirkeln C, och den ligger innanför C precis då $a < 0$. Således blir, med residysatsen och $f(z) = (z-b)/(z+b)z$,

$$I = \begin{cases} 2\pi i(-1/2)\big(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)\big) = -i\pi(-1) = i\pi, & a > 0, \\ 2\pi i(-1/2)\big(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-b} f(z)\big) = -i\pi(-1+2) = -i\pi, & a < 0. \end{cases}$$

<u>Svar</u>: $i\pi$ när $a > 0$, $-i\pi$ när $a < 0$.

7. Sätt $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$; då är det givna påståendet $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ ekvivalent med påståendet $g(z) = f(z)$. Vi noterar att när $z = x \in \Omega \cap \mathbf{R}$ så är $g(x) = \overline{f(\bar{x})} = \overline{f(x)} = f(x)$ eftersom trivialt $\bar{x} = x$ och, enligt förutsättningarna, f är reellvärd på $\Omega \cap \mathbf{R}$. Vidare, Ω är ett område (d.v.s. en icke-tom sammanhängande öppen mängd) som enligt förutsättningarna är symmetriskt m.a.p. realaxeln, så $\Omega \cap \mathbf{R}$ innehåller ett helt intervall i $\mathbf{R}$; således är $g = f$ på en mängd med hopningspunkt i Ω.

Vi skall nu bevisa att $g \in A(\Omega)$; när detta är gjort följer påståendet av entydighetssatsen för analytiska funktioner eftersom, enligt förutsättningarna, $f \in A(\Omega)$. Skriv $f = u + iv$ och $g = \alpha + i\beta$. Eftersom f är $\mathcal{C}^1$ är även g det, så det räcker därför att visa att g uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer $\alpha'_x = \beta'_y$ och $\alpha'_y = -\beta'_x$; vi vet redan att f gör det: $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$.

Vidare, $f(\bar{z}) = u(x,-y) + iv(x,-y)$, så

$$\alpha(x,y) + i\beta(x,y) = g(z) = \overline{f(\bar{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y), \qquad (x,y) \in \Omega,$$

d.v.s. $\alpha(x,y) = u(x,-y)$ och $\beta(x,y) = -v(x,-y)$; notera att $(x,y) \in \Omega \Leftrightarrow (x,-y) \in \Omega$. Vi får

$$\alpha'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\big(u(x,-y)\big) = u'_x(x,-y) \quad \text{och} \quad \beta'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(-v(x,-y)\big) = v'_y(x,-y),$$

och eftersom $u'_x = v'_y$ följer det att $\alpha'_x = \beta'_y$. På motsvarande sätt får vi också att $\alpha'_y(x,y) = -u'_y(x,-y)$ och $\beta'_x(x,y) = -v'_x(x,-y)$, och eftersom $u'_y = -v'_x$ följer det att $\alpha'_y = -\beta'_x$. Således uppfyller g Cauchy-Riemanns ekvationer, och beviset är därmed klart.

TATA45 Komplex analys 2016-08-25, kommentarer

1. Flera tror att $(i^6)^{1/3} = i^2$ (FEL) och därmed att $(i^6)^{1/3} = i^2 = -1$, ett enda värde (FEL). Observera att $i^6 = -1$ så $(i^6)^{1/3} = (-1)^{1/3}$, som antar tre olika värden. Det bakomliggande felet är att räkna som om $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$ gällde allmänt, vilket det INTE gör för komplexa potenser (däremot gäller likheten om β är ett heltal). Många skriver också

$$(i^6)^{1/3} = \Big(\big(e^{i\pi/2+i2n\pi}\big)^6\Big)^{1/3} = \big(e^{i3\pi+i12n\pi}\big)^{1/3} \overset{*}{=} e^{i\pi+i4n\pi} = -1 \quad \text{(OLÄMPLIGT OCH FEL)}$$

eller

$$(i^6)^{1/3} = (-1)^{1/3} = \big(e^{i\pi+i2n\pi}\big)^{1/3} \overset{*}{=} e^{i\pi/3+i2n\pi/3} \qquad \text{(OLÄMPLIGT, RÅKAR BLI RÄTT)}$$

Här är det steg $*$ som blir FEL i det första fallet och RÅKAR bli rätt i det andra. Säkrast är att alltid använda definitionen, $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$, när α inte är ett heltal, som i lösningsskissen:

$$(i^6)^{1/3} = (-1)^{1/3} = \exp\big((1/3)\log(-1)\big) = \exp\big((1/3)(i\pi + i2n\pi)\big) = \exp\left(i\pi/3 + i2n\pi/3\right);$$

notera att heltalet n dyker upp i samband med beräkningen av $\log(-1)$ och ingen annanstans.

Några skriver $1^{1/2} + 1^{1/4} = \exp(in\pi) + \exp(in\pi/2)$, $n \in \mathbf{Z}$ (alltså med samma heltal n i båda), vilket blir FEL; man får endast fyra av de totalt sju olika värdena på detta sätt.

2. Man måste inte utnyttja att u är jämn och v udda utan det går naturligtvis bra att ta med alla reella x i tabellen (som då blir ganska bred).

Det går som vanligt utmärkt att faktorisera endast en av u och v (även om båda var lätta att faktorisera denna gång), men tänk då på att tecknen för både u och v även för stora positiva och negativa x måste beaktas, bäst genom att formellt lägga till $+\infty$ respektive $-\infty$ på x-raden i tabellen. Se kompendiet!

3. Några skriver att ekvationen $z^2 = -2i$ har rötterna $z = \pm\sqrt{-2i}$, alternativt $z = \pm i\sqrt{2i}$, och går sedan vidare i uppgiften och svarar till slut med ett uttryck innehållande $\sqrt{-2i}$ eller $\sqrt{2i}$, typiskt $-3\pi/(32\sqrt{2i})$ (OKLART). Förutom att svaret inte är förenklat är problemet med detta att vi inte ens har definierat symbolen $\sqrt{w}$ i TATA45; menar man att $\sqrt{2i} = 1+i$ eller att $\sqrt{2i} = -1-i$? Det framgår inte, och det måste det göra för att uppgiften skall bli godkänd (hos några ger den ena tolkningen rätt svar, hos andra den andra). Notera däremot att symbolen $w^{1/2}$ är väldefinierad i TATA45 (och tvåvärd): $(2i)^{1/2} = \pm(1+i)$.

4. Några kompletterar den givna punkten $w(\alpha) = 0$ med att avbilda två punkter på cirkeln $|z| = 1$ på två punkter på cirkeln $|w| = 1$, typiskt $w(1) = 1$, $w(i) = i$ eller $w(1) = 1$, $w(-1) = -1$. Om man gör så är det inte alls säkert att den erhållna Möbiusavbildningen $w(z)$ avbildar $|z| = 1$ på $|w| = 1$; i själva verket visar det sig att det INTE blir så om $w(1) = 1$, $w(i) = i$ medan det RÅKAR bli så om $w(1) = 1$, $w(-1) = -1$, men utan ytterligare argument duger inte en sådan lösning. Observera att spegelpunkter bevaras, så $z = 1/\bar{\alpha}$ MÅSTE avbildas på $w = \infty$.

5. (a) Flera har blandat ihop maximumprincipen med ML-uppskattning. Många tappar att f skall vara kontinuerlig på $\bar{\Omega}$. Flera skriver att $\max f$ antas på randen (FEL) i stället för $\max|f|$; observera att det är bokstavligen meningslöst att tala om maximum av ickereella funktioner.

   (b) Vid envariabelundersökningen av $\varphi(x) = (2-2x)e^{2x}$, $-1 \le x \le 1$ (eller av $\sqrt{2-2x} \cdot e^x$) räcker det naturligtvis inte att endast säga att $x = 1/2$ är det enda nollstället för $\varphi'(x)$; detta måste kompletteras antingen med teckenstudium av derivatan eller av beräkning av $\varphi(x)$ i ändpunkterna $x = \pm 1$ (se TATA41 Envariabelanalys 1).

6. Man kan också observera att $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(\theta + ia)\,d\theta = (1/2)\int_{-\pi}^{\pi} \tan(\theta + ia)\,d\theta$ (eftersom tangens har period π: $\tan(z+\pi) = \tan z$) och sätta $z = e^{i\theta}$; även då blir kurvan C hela enhetscirkeln. Om man däremot sätter $z = e^{i\theta}$ direkt i $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(\theta + ia)\,d\theta$ blir C endast en halv enhetscirkel – från $z = -i$ till $z = i$ i högra halvplanet – och residysatsen kan inte användas på något naturligt sätt (däremot kan man med lite försiktighet bestämma en primitiv funktion till $(b^2 - z^2)/(z^2 + b^2)z$ i en omgivning till C – rekommenderas ej!).

7. Inget att kommentera.

Lars Alexandersson, 6 september 2016