Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA45
Provkod: TEN1

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2016-04-01 kl 08.00–13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 15.00.

1. Bestäm Laurentserien för
$$\frac{1}{z^2-9}$$
i följande områden: (a) $|z| > 3$ (b) $2 < |z-1| < 4$. (1p+2p)

2. Beräkna
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iat}}{t^2+1}\,dt, \qquad a \in \mathbf{R}.$$

3. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^5 + 4iz^4 - z^3 + 8z - i$$
har i mängderna $|z| < 1$, $1 \le |z| < 2$ respektive $|z| \ge 2$.

4. Låt C vara sträckan från $z = \pi$ till $z = \pi + i\pi$. Beräkna följande tre kurvintegraler:
$$\int_C \frac{dz}{z}, \qquad \int_C z\,e^z\,dz \qquad \text{och} \qquad \int_C 2z\cos\left(\frac{z^2}{\pi}\right)dz.$$
Svaren skall ges i rektangulär form, alltså i formen $a + ib$ där $a, b \in \mathbf{R}$.

5. Låt C_1 vara cirkeln $|z| = 1$ och C_2 cirkeln $|z - 9/2| = 5/2$, och låt Ω vara området utanför båda.
   (a) Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar Ω på en cirkelring. (2p)
   (b) Bestäm en harmonisk funktion $V(z)$ i Ω för vilken $V = -1$ på C_1 och $V = 1$ på C_2. (1p)

6. (a) Låt f vara analytisk i ett område $0 < |z - z_0| < \delta$ för något $\delta > 0$. Definiera vad som menas med residyn av f i punkten z_0, d.v.s. $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$. (1p)
   (b) Antag att p och q är analytiska i z_0 och sätt $f = p/q$. Om q har enkelt nollställe i z_0 är som bekant $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = p(z_0)/q'(z_0)$. Härled ett motsvarande uttryck för $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$ om q i stället har *dubbelt* nollställe i z_0. (Detta blir inte alls lika snyggt och är inte på långa vägar lika användbart!) (2p)

7. Låt $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ vara en funktion sådan att
$$\begin{cases} f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2) \text{ för alla } z_1, z_2 \in \mathbf{C}, \\ f(0) \neq 0, \\ \text{den komplexa derivatan } f'(0) \text{ existerar.} \end{cases}$$
Visa att det finns en konstant $c \in \mathbf{C}$ sådan att $f(z) = e^{cz}$ för alla $z \in \mathbf{C}$.
(Notera att man inte behöver anta att f är analytisk, endast att $f'(0)$ existerar.)

TATA45 Komplex analys 2016-04-01, lösningsskisser

1. Eftersom $1/(1-q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ när $|q| < 1$ (geometriska serien med kvot q) får vi

(a)
$$\frac{1}{z^2-9} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-9/z^2} = \Big/ q = \frac{9}{z^2} \Big/ = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{9}{z^2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{z^{2n+2}}, \quad |z| > 3.$$

(b)
$$\frac{1}{z^2-9} = \frac{1}{(z+3)(z-3)} = \frac{-1/6}{z+3} + \frac{1/6}{z-3} = \left[\begin{array}{c} w = z-1 \\ 2 < |w| < 4 \end{array} \right] = \frac{-1/6}{w+4} + \frac{1/6}{w-2}$$
$$= -\frac{1}{24} \cdot \frac{1}{1+w/4} + \frac{1}{6w} \cdot \frac{1}{1-2/w} = -\frac{1}{24} \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{w}{4})^n + \frac{1}{6w} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{w})^n$$
$$= -\frac{1}{24} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{4^n} + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}, \quad 2 < |z-1| < 4.$$

2. Sätt $I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}/(t^2+1)\, dt$ och låt $f_a(z) = e^{iaz}/(z^2+1)$ för fixt $a \in \mathbf{R}$; då är $I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)\, dt$ och f_a är analytisk utom i enkelpolerna $z = \pm i$. Låt vidare L_R vara sträckan från $z = -R$ till $z = R$, C_R^+ halvcirkeln från $z = R$ till $z = -R$ i övre halvplanet och C_R^- halvcirkeln från $z = -R$ till $z = R$ i undre halvplanet (rita figur!). Eftersom

$$|e^{iaz}| = e^{-ay} \le 1 \text{ om } ay \ge 0, \text{ och därmed på } \begin{cases} C_R^+ \text{ (där ju } y \ge 0) \text{ om } a \ge 0, \\ C_R^- \text{ (där ju } y \le 0) \text{ om } a \le 0, \end{cases}$$

delar vi upp i två fall: $a \ge 0$ respektive $a \le 0$.

- När $a \ge 0$ använder vi residysatsen på konturen $C_R^+ + L_R$ och får, när $R > 1$,

$$(*) \qquad \int_{C_R^+ + L_R} f_a(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f_a(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{iaz}}{2z}\Big|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

  ML-uppskattning ger $|\int_{C_R^+} f_a(z)\, dz| \le \pi R/(R^2-1) \to 0$ då $R \to \infty$, och genom att låta $R \to \infty$ i $(*)$ får vi $0 + I(a) = \pi e^{-a}$, d.v.s. $I(a) = \pi e^{-a}$, när $a \ge 0$.

- När $a \le 0$ använder vi residysatsen på konturen $C_R^- - L_R$ (observera orienteringen) och får, när $R > 1$,

$$(**) \qquad \int_{C_R^- - L_R} f_a(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-i} f_a(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{iaz}}{2z}\Big|_{z=-i} = -\pi e^{a}.$$

  ML-uppskattning ger $|\int_{C_R^-} f_a(z)\, dz| \le \pi R/(R^2-1) \to 0$ då $R \to \infty$, och genom att låta $R \to \infty$ i $(**)$ får vi $0 - I(a) = -\pi e^{a}$, d.v.s. $I(a) = \pi e^{a}$, när $a \le 0$.

Sammanfattningsvis blir alltså $I(a) = \pi e^{-|a|}$, $a \in \mathbf{R}$. <u>Svar</u>: $\pi e^{-|a|}$.

3. På cirkeln $|z| = 1$ sätter vi $f(z) = 8z$ och $g(z) = z^5 + 4iz^4 - z^3 - i$. Eftersom $|f(z)| = 8|z| = 8$ och $|g(z)| \le |z|^5 + 4|z|^4 + |z|^3 + 1 = 7 < 8$ då $|z| = 1$ (och därmed $|f(z)| > |g(z)|$ där) ger Rouchés sats att $f(z) + g(z)$, alltså $p(z)$, har lika många nollställen i $|z| < 1$ som $f(z)$, d.v.s. 1.

På cirkeln $|z| = 2$ gör vi i stället uppdelningen $f(z) = 4iz^4$ och $g(z) = z^5 - z^3 + 8z - i$. På denna större cirkel är $|f(z)| = 4|z|^4 = 64$ och $|g(z)| \le |z|^5 + |z|^3 + 8|z| + 1 = 57 < 64$, så Rouché ger att $p(z)$ har lika många nollställen i $|z| < 2$ som $f(z)$, d.v.s. 4.

$p(z)$ har grad 5 och har därför totalt 5 nollställen i $\mathbf{C}$.

Sammantaget har $p(z)$ således 1 nollställe i $|z| < 1$, $4-1 = 3$ nollställen i $1 \le |z| < 2$, och $5-4 = 1$ nollställe i $|z| \ge 2$.

<u>Svar</u>: Ett, tre respektive ett.

4. I en omgivning till sträckan $[\pi, \pi + i\pi]$ har integranderna $1/z$, $z\,e^z$ och $2z\cos(z^2/\pi)$ primitiva funktioner $\operatorname{Log} z$ (standardprimitiv), $(z-1)e^z$ (via partiell integration) respektive $\pi\sin(z^2/\pi)$ (direkt igenkänning via $(z^2/\pi)' = 2z/\pi$ eller via explicit variabelbyte $w = z^2/\pi$), så

$$\int_C \frac{dz}{z} = \big[\operatorname{Log} z\big]_\pi^{\pi+i\pi} = \big(\ln(\pi\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}\big) - \ln\pi = \frac{\ln 2}{2} + i\frac{\pi}{4},$$

$$\int_C z\,e^z\,dz = \big[(z-1)e^z\big]_\pi^{\pi+i\pi} = (\pi - 1 + i\pi)e^{\pi+i\pi} - (\pi-1)e^\pi = (2-2\pi)e^\pi - i\pi e^\pi$$

och

$$\int_C 2z\cos\big(\frac{z^2}{\pi}\big)\,dz = \left[\pi\sin\big(\frac{z^2}{\pi}\big)\right]_\pi^{\pi+i\pi} = \pi(\sin 2\pi i - \sin\pi) = i\pi\sinh 2\pi.$$

5. (a) Låt $z = a$ och $z = b$ vara de *gemensamma* spegelpunkterna m.a.p. C_1 och C_2. Genom att med en Möbiusavbildning $w(z)$ avbilda dessa på $w = 0$ respektive $w = \infty$, som ju är de gemensamma spegelpunkterna m.a.p. alla cirklar med centrum i origo, kommer Ω att avbildas på en cirkelring med centrum i origo, enligt egenskaper hos Möbiusavbildningar. Geometrin ger att a och b ligger på realaxeln, på samma sida om $z = 0$ och på samma sida om $z = 9/2$ – en innanför C_1 och en innanför C_2; alltså måste båda två ligga i intervallet $]0, 9/2[$, och vi kan anta att $0 < a < b < 9/2$. Vidare är $ab = 1^2$ och $(9/2 - a)(9/2 - b) = (5/2)^2$, vilket ger $a = 1/3$ och $b = 3$. Om vi kompletterar de så erhållna punkterna $w(1/3) = 0$ och $w(3) = \infty$ med att avbilda någon punkt på C_1 på enhetscirkeln, säg, t.ex. $w(1) = 1$, får vi med standardmetoder

$$w(z) = \frac{3z-1}{3-z}.$$

C_1 avbildas nu på $\tilde{C}_1 : |w| = 1$, och C_2 avbildas på någon cirkel $\tilde{C}_2 : |w| = R$, där R kan bestämmas genom att sätta in valfri punkt på C_2; vi får $R = |w(2)| = 5$. Området Ω avbildas därför på cirkelringen $\tilde{\Omega} : 1 < |w| < 5$.

(b) Låt $w(z)$ och $\tilde{\Omega}$ vara som ovan. I $\tilde{\Omega}$ finns harmoniska funktioner $V = A\ln|w| + B$ som är konstanta på cirklar $|w| = r$. Kraven $V = -1$ då $|w| = 1$ och $V = 1$ då $|w| = 5$ ger $B = -1$ respektive $A\ln 5 + B = 1$, så

$$V(z) = \frac{2}{\ln 5}\ln|w(z)| - 1 = \frac{2}{\ln 5}\ln\left|\frac{3z-1}{3-z}\right| - 1.$$

6. (a) $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$, där $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, Laurentserien för $f(z)$, i området $0 < |z - z_0| < \delta$.

(b) Eftersom q har dubbelt nollställe i z_0 kan vi skriva $q(z) = (z-z_0)^2 h(z)$ för någon funktion h som är analytisk i z_0 och för vilken $h(z_0) \neq 0$. Taylorutveckling av $q(z)$ och $h(z)$ kring z_0 och identifiering av koefficienter (eller direkt derivering av sambandet $q(z) = (z-z_0)^2 h(z)$ tre gånger) ger $h(z_0) = q''(z_0)/2!$ och $h'(z_0) = q'''(z_0)/3!$. Med $g = p/h$, som är analytisk i z_0, får vi

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= \operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{p(z)}{q(z)} = \operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{p(z)/h(z)}{(z-z_0)^2} = \operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{g(z)}{(z-z_0)^2} = g'(z_0)\\ &= \frac{p'(z_0)h(z_0) - p(z_0)h'(z_0)}{(h(z_0))^2} = \frac{6p'(z_0)q''(z_0) - 2p(z_0)q'''(z_0)}{3(q''(z_0))^2}.\end{aligned}$$

7. För varje fixt $z \in \mathbf{C}$ får vi att

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{f(z)f(\Delta z) - f(z)f(0)}{\Delta z} = f(z)\frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} \to f(z)f'(0), \qquad \Delta z \to 0,$$

eftersom $f'(0)$ antas existera. Om vi sätter $c = f'(0)$ har vi därmed bevisat att $f'(z)$ existerar och att $f'(z) = cf(z)$; detta gäller således för alla $z \in \mathbf{C}$. Men

$$f' = cf \;\Leftrightarrow\; e^{-cz}(f' - cf) = 0 \;\Leftrightarrow\; (e^{-cz}f)' = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-cz}f = A \;\Leftrightarrow\; f = Ae^{cz}$$

för någon konstant $A \in \mathbf{C}$, och eftersom $A = f(0) = f(0+0) = f(0)f(0) = A^2$ och $f(0) \neq 0$ följer det att $A = 1$. Således är $f(z) = e^{cz}$, vilket skulle bevisas.

TATA45 Komplex analys 2016-04-01, kommentarer

1. Även i (a) kan man använda partialbråksuppdelningen i (b), och i så fall får man

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2-9} &= \frac{1}{(z+3)(z-3)} = \frac{-1/6}{z+3} + \frac{1/6}{z-3} = -\frac{1}{6z}\cdot\frac{1}{1+3/z} + \frac{1}{6z}\cdot\frac{1}{1-3/z} \\ &= \frac{1}{6z}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{3}{z}\Big)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{3}{z}\Big)^n\right) = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\big(1-(-1)^n\big)}{z^{n+1}}, \qquad |z|>3.\end{aligned}$$

   Det går också bra att svara med två summor om man vill, och man *kan*, men måste inte, förenkla det sista uttrycket genom att observera att endast udda n ger bidrag till summan.

   Några få tror att $1/(1+q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ (FEL) i stället för det korrekta $1/(1-q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ när $|q|<1$.

2. Flera tror att samma kontur, typiskt $C_R^+ + L_R$, fungerar för alla $a \in \mathbf{R}$ (FEL); observera att man måste använda konturen $C_R^+ + L_R$ när $a \geq 0$ och konturen $C_R^- - L_R$ när $a \leq 0$ för att ML-uppskattningarna på halvcirklarna skall fungera som önskat.

   Många missar att ta med fallet $a = 0$, oklart varför. Notera att detta fall inte behöver specialbehandlas eftersom uppskattningen $|e^{iaz}| = e^{-ay} \leq 1$ när $ay \geq 0$ trivialt fungerar även när $a = 0$ (då gäller den t.o.m. för alla $y \in \mathbf{R}$). Se lösningsskissen!

   Flera gör enkla fel i ML-uppskattningen, typiskt genom att påstå att $|1/(z^2+1)| \leq 1/(R^2+1)$ (FEL) i stället för det korrekta $|1/(z^2+1)| \leq 1/(R^2-1)$; notera att z^2+1 står i *nämnaren* och att vi därför måste uppskatta $|z^2+1|$ *nedåt*: $|z^2+1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1 > 0$ både på C_R^+ och C_R^- när R är stort ($R > 1$).

3. Vi diskuterar här den del av uppgiften som handlar om att bestämma antalet nollställen som p har i skivan $|z| < 1$. Som i lösningsskissen gör vi uppdelningen $f(z) = 8z$ och $g(z) = z^5 + 4iz^4 - z^3 - i$ och får uppskattningarna $|f(z)| = 8|z| = 8$ och, med triangelolikheten, $|g(z)| \leq |z|^5 + 4|z|^4 + |z|^3 + 1 = 7 < 8$ då $|z| = 1$; därmed är $|f(z)| > |g(z)|$ för alla z på randen $|z| = 1$, och Rouchés sats säger nu att $p = f + g$ har samma antal nollställen i $|z| < 1$ som f, d.v.s. ett. Uppskattningarna skall alltså ske på randen $|z| = 1$ – hela randen! – och ingen annanstans, om man vill använda Rouchés sats. Det måste också framgå av lösningarna att det är just randen man undersöker.

   En provkarta på vanliga FEL:

   - "Då $|z| = 1$ är $|f(z)| \leq 8$ och $|g(z)| \leq 7$, och därmed är $|f(z)| > |g(z)|$ där". Att $|f(z)| \leq 8$ och $|g(z)| \leq 7$ då $|z| = 1$ är i och för sig sant, men dessa uppskattningar medför inte att $|f(z)| > |g(z)|$ då $|z| = 1$ – t.ex. skulle det kunna vara så att $|f(z_0)| = 4$ och $|g(z_0)| = 5$ för någon punkt z_0 på randen.
   - "$|g(z)| = |z|^5 + 4|z|^4 + |z|^3 + 1 = 7$". Här behöver det inte vara likhet, utan i stället måste man använda triangelolikheten, som ovan.
   - "$|f(1)| = 8$ och $|g(1)| = 3$, alltså är $|f(1)| > |g(1)|$". I och för sig sant, men det räcker inte att kolla en enda punkt (här: $z = 1$) på randen $|z| = 1$, som ju är en hel cirkel.
   - "Alltså är $|f(z)| > |g(z)|$ då $|z| < 1$, och därmed har $p = f + g$ och f lika många nollställen i $|z| < 1$, d.v.s. ett". Här består felet i ett enda tecken (den första förekomsten av "$<$" skall ersättas med "$=$"), men konsekvensen är desto större, eftersom $f(z) + g(z)$ inte kan vara noll över huvud taget i skivan $|z| < 1$ om $|f(z)| > |g(z)|$ i denna skiva; summan av två olika långa komplexa tal kan ju aldrig bli noll.

4. Observera att med *sträckan* C från $z = \pi$ till $z = \pi + i\pi$ menas "raka spåret", alltså linjestycket, från $z = \pi$ till $z = \pi + i\pi$. (Begreppet sträcka är väldefinierat i matematiken, liksom t.ex. stråle.)

   Alla kommentarer nedan handlar om integralen $\int_C (1/z)\,dz$, som är den som vållade mest bekymmer. Dock, vid beräkningen av integralen $\int_C 2z\cos(z^2/\pi)\,dz$ gör förvånansvärt många felet $(\pi + i\pi)^2 = 2\pi i$ (FEL); rätt värde är naturligtvis $2\pi^2 i$.

   Många svarar att $\int_C (1/z)\,dz = (\ln 2)/2 + i\pi/4 + i2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (FEL). Observera att en kurvintegral av en given funktion längs en given kurva har *ett* bestämt värde, så det är orimligt att få flera olika värden.

När man beräknar $\int_C (1/z)\,dz$ med primitiv funktion måste man hitta en primitiv funktion $F(z)$ till $f(z) = 1/z$ som fungerar i en omgivning till sträckan C, vilket är samma sak som att hitta en gren till den flervärda logaritmen $\log z$ som är definierad i en omgivning till C. Eftersom principallogaritmen $\operatorname{Log} z$ duger som primitiv i området $\mathbf{C}\setminus\,]-\infty, 0]$, och detta område innehåller kurvan C, kan vi alltså låta $F(z) = \operatorname{Log} z$, som i lösningsskissen. Andra grenar till $\log z$ fungerar också, så länge vi klipper upp planet $\mathbf{C}$ längs en kurva från $z = 0$ som inte träffar sträckan C, jfr Avsnitt 2.2 i kompendiet. Om man använder en annan gren än $\operatorname{Log} z$ måste man precisera *var* och *hur* den är definierad, jfr Avsnitt 3.3.

Ett vanligt FEL är att tro att den *flervärda* logaritmen $\log z$ kan användas vid beräkning av $\int_C (1/z)\,dz$. Det är i och för sig sant att $\int_C (1/z)\,dz = \widetilde{\log}(\pi + i\pi) - \widetilde{\log}\,\pi$ för varje gren $\widetilde{\log}\,z$ till $\log z$ som är definierad i en omgivning till C, och $\widetilde{\log}(\pi + i\pi)$ är *något* av alla värden $\log(\pi + i\pi) = \ln(\pi\sqrt{2}) + i\pi/4 + i2\pi n$ och $\widetilde{\log}\,\pi$ är *något* av alla värden $\log \pi = \ln \pi + i2\pi n$, men det är långt ifrån självklart att det är *samma* heltal n i de båda uttrycken. Det RÅKAR vara så här, eftersom kurvan C ligger där den ligger, men att bevisa det är ekvivalent med att just bestämma en gren till $\log z$ som är definierad i en omgivning till kurvan C.

Några skriver $\operatorname{Log}(\pi + i\pi) - \operatorname{Log}\pi \overset{*}{=} \operatorname{Log}\big((\pi + i\pi)/\pi\big) = \operatorname{Log}(1 + i)$ vilket i och för sig är sant, men steg $*$ måste motiveras; $\operatorname{Log}(z/w)$ är ju inte alltid samma sak som $\operatorname{Log} z - \operatorname{Log} w$, se återigen Avsnitt 2.2.

Man kan också parametrisera sträckan C, t.ex. som $z = \pi + i\pi t$, $t : 0 \to 1$, och få

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{i\pi\,dt}{\pi + i\pi t} = \int_0^1 \frac{t + i}{1 + t^2}\,dt = \left[\frac{\ln(1 + t^2)}{2} + i \arctan t\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} + i\frac{\pi}{4};$$

notera att t är en *reell* parameter. Enklast är dock att använda komplex primitiv funktion, som i lösningsskissen. Några tar en medelväg och skriver

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{i\pi\,dt}{\pi + i\pi t} = \int_0^1 \frac{i\,dt}{1 + it} \overset{*}{=} \big[\widetilde{\log}(1 + it)\big]_0^1 = \ldots,$$

och steg $*$ är OK om grenen $\widetilde{\log}\,w$ som förekommer här är definierad i en omgivning till alla punkter $w = 1 + it$, $t : 0 \to 1$, alltså i en omgivning till sträckan från $w = 1$ till $w = 1 + i$; t.ex. fungerar det att välja grenen $\operatorname{Log} w$. Om man inte väljer $\operatorname{Log} w$ måste man precisera vilken gren man väljer, och se till att den är definierad i en omgivning till sträckan i fråga.

5. För att området Ω skall kunna avbildas på en cirkelring MÅSTE någon av de gemensamma spegelpunkterna $z = 1/3$ och $z = 3$ avbildas på $w = \infty$.

   Avbildningen $w(z)$ är inte entydigt bestämd; i lösningsskissen valde vi $w(3) = \infty$, men det går lika bra att i stället välja $w(1/3) = \infty$ (och i så fall, enklast, $w(3) = 0$). Dock, den harmoniska funktionen $V(z)$ i (b) *är* entydigt bestämd.

6. I (a) efterfrågas DEFINITIONEN av residy. Många har i stället angett någon räkneregel för beräkning av residy i pol, men det är inte det uppgiften handlar om. Ytterligare andra har angett kurvintegralen $\int_C f(z)\,dz$ där C är någon cirkel $|z - z_0| = \rho$, $0 < \rho < \delta$, vilket i och för sig är samma sak som residyn men inte definitionen av residy (i denna kurs). Några har sagt att residyn är koefficienten för $1/z$ (FEL) i stället för koefficienten för $1/(z - z_0)$.

   I (b) har några utgått ifrån att $q(z) = (z - z_0)^2$, men det kan man inte göra – det är alldeles för restriktivt, och det enda vi vet är att $q(z)$ har dubbelt nollställe i z_0.

7. I de flesta inlämnade lösningar – ett tiotal – visas det (mycket lättare) omvända påståendet, d.v.s. att *om* $f(z) = e^{cz}$ för något $c \in \mathbf{C}$, så är det sant att $f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$, att $f(0) \neq 0$ och att $f'(0)$ existerar; gör man så har man bevisat något annat än det som efterfrågas, och det ger ingen poäng.

Lars Alexandersson, 13 april 2016