Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: `TATA45`
Provkod: `TEN1`

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2016-01-16 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. Lös ekvationen
$$(1-i)e^{-z} - e^{z} = i.$$
Svaret skall ges i rektangulär form, alltså i formen $a + ib$.

2. Beräkna med residykalkyl
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(5+3\cos\theta)^2}.$$

3. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar området $|z+i| > 2$ på övre halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$ samtidigt som $w(0) = -i$ och $w(i) = 0$. Bestäm sedan bilden i w-planet av realaxeln i z-planet.

4. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^5 + 4z^2 - z + 2$$
har i (a) vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$ (b) enhetsskivan $|z| < 1$. (2p+1p)

5. Låt m och n vara heltal sådana att $1 \le m < n$. Beräkna
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx,$$
t.ex. genom att integrera längs randen till cirkelsektorn $0 \le r \le R$, $0 \le \theta \le \alpha$ för något lämpligt α, en s.k. tårtbitskontur ($z = re^{i\theta}$).

6. (a) Formulera Liouvilles sats.
   (b) Bestäm en ickekonstant funktion $g \in A(\mathbf{C})$ sådan att $\operatorname{Im} g > 0$, eller visa att en sådan funktion inte finns.
   (c) Låt $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, det punkterade planet. Bestäm en ickekonstant begränsad funktion $h \in A(\mathbf{C}^*)$, eller visa att en sådan funktion inte finns.

7. Antag att $0 \le r < 1$ och att $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Visa att det finns en konstant $C = C_{r,n}$ sådan att
$$\max_{|z|\le r} |f^{(n)}(z)| \le C \max_{|z|=1} |f(z)|$$
för alla funktioner f som är analytiska i något område Ω som innehåller den slutna skivan $|z| \le 1$. (Notera att C alltså får bero på r och n men inte på f.)
Kan man hitta en sådan konstant $C = C_n$ även när $r = 1$?

TATA45 Komplex analys 2016-01-16, lösningsskisser

1. Sätt $s = e^z$. Vi får ekvationen $(1-i)/s - s = i$, som omskriven blir $s^2 + is - (1-i) = 0$, d.v.s.

$$\left(s + \frac{i}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - i, \quad \text{som med } s + \frac{i}{2} = w = u + iv \text{ blir systemet } \begin{cases} u^2 - v^2 = 3/4 & \text{(Re)}, \\ 2uv = -1 & \text{(Im)}, \\ u^2 + v^2 = 5/4 & \text{(Abs)}, \end{cases}$$

med lösningarna $w = \pm(2-i)/2$; därmed är $s = 1 - i$ eller $s = -1$. Via $z = \log s$ får vi slutligen $z = (\ln 2)/2 - i\pi/4 + i2\pi m$ eller $z = i\pi + i2\pi n$, där m och n är heltal.

<u>Svar</u>: $z = (\ln 2)/2 - i\pi/4 + i2\pi m$ eller $z = i\pi + i2\pi n$, där $m, n \in \mathbf{Z}$.

2. Med $z = e^{i\theta}$ får vi, där C är den positivt orienterade enhetscirkeln $|z| = 1$ tagen ett varv,

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(5 + 3\cos\theta)^2} = \int_C \frac{dz/iz}{\left(5 + 3(z + z^{-1})/2\right)^2} = \frac{4}{9i} \int_C \frac{z\,dz}{(z^2 + 10z/3 + 1)^2}$$
$$= \frac{4}{9i} \int_C \frac{z\,dz}{(z + 1/3)^2 (z+3)^2}.$$

Integranden har endast singulariteten $z = -1/3$ (dubbelpol) innanför C, så residysatsen och sedvanlig residyberäkning (eller Cauchys integralformel för derivata) ger

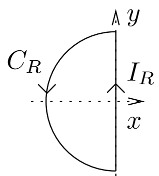
$$I = \frac{4}{9i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=-1/3} \frac{z/(z+3)^2}{(z+1/3)^2} = \frac{8\pi}{9} \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z+3)^2}\right)\Big|_{z=-1/3} = \frac{8\pi}{9} \cdot \frac{3 - z}{(z+3)^3}\Big|_{z=-1/3} = \frac{5\pi}{32}.$$

3. Att $w(0) = -i$ ger med nödvändighet $w(3i) = i$, eftersom 0 och $3i$ är spegelpunkter m.a.p. cirkeln $|z + i| = 2$, och $-i$ och i är spegelpunkter m.a.p. linjen $\operatorname{Im} w = 0$ (rita figurer!). Eftersom dessutom $w(i) = 0$ är Möbiusavbildningen entydigt bestämd: $w(z) = (3iz + 3)/(z + 3i)$. Denna avbildar cirkeln $|z + i| = 2$ på linjen $\operatorname{Im} w = 0$, och eftersom $w(3i) = i$ avbildar den dessutom området $|z + i| > 2$ på halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$ (inre punkt avbildas på inre punkt).

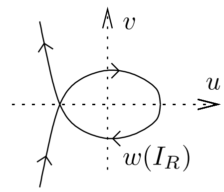
Låt L vara realaxeln $\operatorname{Im} z = 0$ i z-planet och $\tilde{L}$ den $\hat{\mathbf{C}}$-cirkel i w-planet som L avbildas på under $w(z)$ ovan. Eftersom $w(-3i) = \infty$ och $-3i \notin L$ är $\tilde{L}$ en vanlig cirkel $|w - c| = r$, där centrum $c = w(3i) = i$ eftersom $-3i$ och $3i$ är spegelpunkter m.a.p. L och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{L}$. Slutligen, $0 \in L$ ger $w(0) = -i \in \tilde{L}$, så $r = |-i - i| = 2$, och $\tilde{L}$ är cirkeln $|w - i| = 2$.

<u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{3iz + 3}{z + 3i}$; cirkeln $|w - i| = 2$.

4. (a) Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^5 + 4z^2 - z + 2$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R + I_R$ (se figur nere till vänster). På C_R får vi tillskottet $\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^5 + \Delta_{C_R} \arg(1 + 4/z^3 - 1/z^4 + 2/z^5) \to 5 \cdot \pi + 0 = 5\pi$ då $R \to \infty$. På I_R får vi $p(z) = p(iy) = (2 - 4y^2) + i(y^5 - y) = u + iv$, $y : -R \to R$, och därmed nedanstående teckentabell då $y \geq 0$ (observera att u är jämn och v udda), samt kurva $w = p(z)$ då z genomlöper I_R:



y	0	<	$1/\sqrt{2}$	<	1	<
u (jämn)	+	+	0	−	−	−
v (udda)	0	−	−	−	0	+



Dessutom får vi av gradskäl att $u/v \to 0$ då $y \to \pm\infty$ (v drar mer än u), och detta tillsammans med tabellen ovan ger figuren ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{I_R} \arg p(z) \to -3\pi$ då $R \to \infty$. Eftersom poler saknas blir antalet nollställen i vänstra halvplanet därför $(1/2\pi) \lim_{R\to\infty} (\Delta_{C_R} \arg p(z) + \Delta_{I_R} \arg p(z)) = (5\pi - 3\pi)/2\pi = 1$. <u>Svar</u>: Ett.

(b) Sätt $f(z) = 4z^2$ och $g(z) = z^5 - z + 2$. På cirkeln $|z| = 1$ är $|f(z)| = 4|z|^2 = 4$ medan $|g(z)| = |z^5 - z + 2| \leq |z^5| + |-z| + |2| = 4$, med likhet $\Leftrightarrow$ talen z^5, $-z$ och 2, som vektorer, är parallella och lika riktade $\Leftrightarrow$ $z^5 = 1$ och $-z = 1$ (eftersom dessutom $|z| = 1$); detta är dock omöjligt eftersom $(-1)^5 = -1 \neq 1$. Således är $|g(z)| < 4$ på hela cirkeln $|z| = 1$, och därmed är också $|f(z)| > |g(z)|$ på hela denna cirkel. Rouchés sats medför nu att $p(z) = f(z) + g(z)$ har lika många nollställen i $|z| < 1$ som $f(z)$, alltså 2. <u>Svar</u>: Två.

5. Låt $f(z) = z^{m-1}/(1+z^n)$ för fixa m och n sådana att $1 \le m < n$, och sätt $\Gamma_R = L_R^1 + C_R + L_R^2$, där L_R^1 är sträckan från 0 till R, C_R cirkelbågen med radie R från 0 till $Re^{i\alpha}$ och L_R^2 sträckan från $Re^{i\alpha}$ till 0 (rita figur!); $\alpha = 2\pi/n$ är ett bra val, ty nämnaren $1+z^n$ antar samma värden på L_R^1 som på L_R^2 i så fall eftersom $(te^{i\alpha})^n = t^n e^{i\alpha n} = t^n e^{i2\pi} = t^n$ då.

   f är analytisk på och innanför Γ_R utom där $z^n = -1$, som är en binomisk ekvation med rötterna $z_k = \exp(i\pi/n + i2\pi k/n)$, $k = 0, \ldots, n-1$, varav endast $z_0 = e^{i\pi/n}$ (enkelpol till f) ligger innanför Γ_R när $R > 1$ (och ingen ligger *på* konturen Γ_R). Residysatsen ger därför, när $R > 1$,

$$(*) \quad \int_{L_R^1 + C_R + L_R^2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{z^{m-1}}{\frac{d}{dz}(1+z^n)}_{|z=z_0} = 2\pi i \cdot \frac{z^{m-1}}{nz^{n-1}}_{|z=z_0} = -\frac{2\pi i}{n} e^{i\pi m/n}.$$

   Parametriseringarna $z = t$, $t : 0 \to R$, av L_R^1 och $z = te^{i\alpha} = te^{i2\pi/n}$, $t : R \to 0$, av L_R^2 ger

$$\int_{L_R^1 + L_R^2} f(z)\,dz = \int_0^R \frac{t^{m-1}\,dt}{1+t^n} + \int_R^0 \frac{t^{m-1} e^{i2\pi(m-1)/n}\, e^{i2\pi/n} dt}{1 + t^n e^{i2\pi}} = (1 - e^{i2\pi m/n}) \int_0^R \frac{t^{m-1}\,dt}{1+t^n},$$

   och ML-uppskattning på C_R ger, eftersom $|1+z^n| \ge |z|^n - 1 = R^n - 1 > 0$ på C_R för stora R,

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \le \frac{R^{m-1}}{R^n - 1} \cdot \frac{2\pi R}{n} = \frac{R^{m-n}}{1 - R^{-n}} \cdot \frac{2\pi}{n} \to 0, \qquad R \to \infty,$$

   eftersom $1 \le m < n$. Gränsövergången $R \to \infty$ i $(*)$ ger därför

$$(1 - e^{i2\pi m/n}) \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{1+t^n}\,dt + 0 = -\frac{2\pi i}{n} e^{i\pi m/n},$$

   d.v.s.

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{1+t^n}\,dt = \frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{e^{i\pi m/n}}{e^{i2\pi m/n} - 1} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{2i}{e^{i\pi m/n} - e^{-i\pi m/n}} = \frac{\pi/n}{\sin(m\pi/n)}.$$

6. (a) Om f är hel analytisk (d.v.s. $f \in A(\mathbf{C})$) och begränsad, så är f konstant.

   (b) Någon sådan g finns inte. *Bevis*: Antag att $g \in A(\mathbf{C})$ och att $\operatorname{Im} g > 0$. Låt $s = T(w)$ vara en Möbiusavbildning som avbildar övre halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$ på enhetsskivan $|s| < 1$, t.ex. $s = (i-w)/(i+w)$. Sätt $\varphi(z) = T(g(z))$. Då är φ hel analytisk och $|\varphi(z)| < 1$ för alla $z \in \mathbf{C}$, så $\varphi(z) =$ någon konstant C med $|C| < 1$ enligt Liouvilles sats, varför $g(z) = T^{-1}(C)$, konstant.

   (c) Någon sådan h finns inte. *Bevis*: Antag att $h \in A(\mathbf{C}^*)$ och att h är begränsad, d.v.s. att det finns en konstant M sådan att $|h(z)| \le M$ för alla $z \ne 0$. Den isolerade singulariteten $z = 0$ är därför hävbar och vi kan således (om)definiera $h(0)$, med kontinuitet, så att h blir hel analytisk; speciellt är nu $|h(z)| \le M$ för alla $z \in \mathbf{C}$. Liouvilles sats medför att h är konstant på $\mathbf{C}$, därmed även på $\mathbf{C}^*$.

7. Om $f \in A(\Omega)$ säger Cauchys integralformel för derivata tillämpad på $\omega = \{s \in \mathbf{C} : |s| < 1\}$ att

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^{n+1}}, \qquad z \in \omega, \ n \in \mathbf{N},$$

   och $\partial\omega$ är enhetscirkeln $|s| = 1$ tagen ett varv moturs; observera att $\bar{\omega} \subset \Omega$, enligt förutsättningen. Om $|z| \le r < 1$ är $|s - z| \ge |s| - |z| \ge 1 - r > 0$ på $\partial\omega$, och därmed ger ML-uppskattning att

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{\max_{s \in \partial\omega} |f(s)|}{(1-r)^{n+1}} \cdot 2\pi 1 = \frac{n!}{(1-r)^{n+1}} \cdot \max_{|s|=1} |f(s)|, \qquad |z| \le r, \ n \in \mathbf{N},$$

   och därmed duger konstanten $C = C_{r,n} = n!/(1-r)^{n+1}$.

   Antag att en konstant $C = C_n$ finns även när $r = 1$, så att $\max_{|z|\le 1} |f^{(n)}(z)| \le C \max_{|z|=1} |f(z)|$ för alla $f \in A(\Omega)$; då är speciellt $|f^{(n)}(0)| \le C \max_{|z|=1} |f(z)|$. För fixt $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ gäller i så fall olikheten bl.a. för alla funktioner $f(z) = z^k$, k heltal $\ge n$, varför $C \ge k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1) \ge k$, men det ger en motsägelse när $k \to \infty$. Någon sådan konstant finns alltså inte.

TATA45 Komplex analys 2016-01-16, kommentarer

1. Det vanligaste problemet här är att man inte kan lösa andragradsekvationen $s^2 + is - (1 - i) = 0$ ordentligt. Flera skriver $\sqrt{3/4 - i}$ eller $(3/4 - i)^{1/2}$, eventuellt med $\pm$ framför, utan att förenkla till $\pm(2 - i)/2$, d.v.s. utan att lösa ekvationen $w^2 = 3/4 - i$. (Komplexa andragradsekvationer studerades som bekant redan i Matematisk grundkurs.)

   Några försöker lösa ekvationen $w^2 = 3/4 - i$ i polär form och gå vidare därifrån, vilket inte är omöjligt men klart svårare; man tvingas beräkna $\cos(\alpha/2)$ och $\sin(\alpha/2)$ med $\alpha = -\arctan(4/3)$ i så fall för att så småningom komma fram till $w = \pm(2 - i)/2$. Rekommenderas ej!

2. Integralen är tydligt reell och positiv, så alla ickereella svar och alla reella svar ≤ 0 är orimliga.

   Ett besvärande vanligt fel i denna uppgift – det finns i var femte inlämnad lösning! – har egentligen ingenting med komplex analys att göra: Man räknar som om

$$5 + \frac{3z}{2} + \frac{3}{2z} = (z + \frac{1}{3})(z + 3) \qquad \text{(FEL)}.$$

   Ekvationen $5 + 3z/2 + 3/2z = 0$ har mycket riktigt lösningarna $z = -1/3$ och $z = -3$, men det är ju bara POLYNOM med HÖGSTAGRADSKOEFFICIENT 1 man kan faktorisera så:

$$z^2 + \frac{10z}{3} + 1 = (z + \frac{1}{3})(z + 3).$$

   En korrekt omskrivning av uttrycket ovan är därför

$$5 + \frac{3z}{2} + \frac{3}{2z} = \frac{3}{2z} \cdot (z^2 + \frac{10z}{3} + 1) = \frac{3}{2z}(z + \frac{1}{3})(z + 3).$$

3. Några har tagit en andra punkt på cirkeln $|z + i| = 2$ och avbildat på en andra punkt på linjen $\operatorname{Im} w = 0$, typiskt $w(-3i) = \infty$, även om andra val också förekommer, t.ex. $w(2 - i) = \infty$ eller $w(2 - i) = 1$, för att komplettera de givna $w(0) = -i$ och $w(i) = 0$ till en z-trippel och en w-trippel. Om man gör så är det inte alls säkert att den erhållna Möbiusavbildningen $w(z)$ avbildar $|z + i| > 2$ på $\operatorname{Im} w > 0$; i själva verket visar det sig att det INTE blir så om $w(2 - i) = \infty$ eller $w(2 - i) = 1$ medan det RÅKAR bli så om $w(-3i) = \infty$ (eller $w(2 - i) = 3$, för den delen), men utan ytterligare argument duger inte en sådan lösning.

   Observera att spegelpunkter bevaras, så $z = 3i$ MÅSTE avbildas på $w = i$. Det finns ingen valfrihet alls.

4. (a) Överraskande många gör trivialfelet $(iy)^2 = -y$ (FEL) vid undersökningen av argumenttillskottet längs imaginäraxeln.

   Flera har rätt kurva i w-planet men avläser ändå argumenttillskottet fel, oftast till 3π (FEL) i stället för det korrekta -3π; i några fall kan det bero på att man inte har markerat orienteringen med pilar i figuren. Var alltid noga med orienteringen!

   Det går som vanligt utmärkt att faktorisera endast en av u och v, men tänk då på att tecknen för både u och v även för stora positiva och negativa y måste beaktas (bäst genom att formellt lägga till $+\infty$ respektive $-\infty$ på y-raden i tabellen). Se kompendiet!

   (b) Denna Rouchéuppgift har en extra svårighet i det att man måste visa att $|z^5 - z + 2| < 4$ (sträng olikhet) och inte endast ≤ 4 då $|z| = 1$; man måste alltså visa att talen z^5, $-z$ och 2 som vektorer aldrig kan vara parallella och lika riktade då $|z| = 1$. Några påstår att redan z^5 och $-z$ aldrig kan vara lika riktade (FEL); ett motexempel är $z = e^{i\pi/4}$. Andra inser visserligen att z^5, $-z$ och 2 är lika riktade precis då $z^5 = 1$ och $-z = 1$, men påstår sedan att $z^5 = 1 \Rightarrow z = 1$ (FEL); denna binomiska ekvation har ju fem olika lösningar på enhetscirkeln.

   Flera tror (hoppas?) å andra sidan att Rouchés sats tillåter att $|f| \geq |g|$ på randen (FEL) – den kräver att $|f| > |g|$ där.

   Ytterligare andra tror att $|z^5 - z + 2| \leq |z^5| - |z| + 2$ (FEL); observera att den korrekta olikheten lyder $|z^5 - z + 2| = |z^5 + (-z) + 2| \leq |z^5| + |-z| + |2| = |z|^5 + |z| + 2$.

   I denna Rouchéuppgift förekommer det också ett antal ”klassiska” fel i lösningarna. Se kommentarerna till uppgift 2b på tentamen 2011-12-20 för en allmän diskussion.

5. Man bör naturligtvis inte stanna vid uttrycket

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{1+t^n}\,dt = \frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{e^{i\pi m/n}}{e^{i2\pi m/n}-1}$$

eller liknande; i stället bör man skriva om så att man ser att svaret är tydligt reellt (och positivt).

6. (a) Överraskande många tror att Liouvilles sats är någon variant av maximumprincipen. Observera att Liouvilles sats handlar om HELA analytiska funktioner, d.v.s. om funktioner $f \in A(\mathbf{C})$, som dessutom är begränsade. Flera tror att den gäller för begränsade $f \in A(\Omega)$ i allmänna områden Ω (FEL).

   (b) Inget att kommentera.

   (c) Man kan alternativt använda Cauchys olikheter direkt: Om h är en begränsad analytisk funktion i $\mathbf{C}^*$ så finns det dels en konstant M sådan att $|h(z)| \le M$ för alla $z \in \mathbf{C}^*$, dels en Laurentserieutveckling

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad |z| > 0,$$

   där koefficienterna c_n uppfyller olikheterna $|c_n| \le M/\rho^n$ för alla $\rho > 0$ och alla $n \in \mathbf{Z}$. Genom att dels låta $\rho \to \infty$ när $n \ge 1$, dels låta $\rho \to 0^+$ när $n \le -1$, inser vi att $c_n = 0$ närhelst $n \ne 0$, varför $h(z) = c_0$ för alla $z \in \mathbf{C}^*$; h är alltså konstant.

7. Som motexempel i fallet $r = 1$ kan man också ta $f(z) = e^{mz}$ för $m = 1, 2, 3, \ldots$, vilket en student också föreslog i sina lösningar. Då blir nämligen $f^{(n)}(z) = m^n e^{mz}$, och

$$\max_{|z|\le 1} |e^{mz}| \overset{*}{=} \max_{|z|=1} |e^{mz}| = \max_{|z|=1} e^{mx} = e^m,$$

där likheten $*$ beror på maximumprincipen (eller på elementära räkningar). Om det nu verkligen funnes konstanter $C = C_n$ sådana att $\max_{|z|\le 1} |f^{(n)}(z)| \le C \max_{|z|=1} |f(z)|$ för alla $f \in A(\Omega)$, så vore speciellt $m^n e^m \le C e^m$, d.v.s. $m^n \le C$, vilket ger en motsägelse för varje fixt $n \ge 1$ när $m \to \infty$.

Lars Alexandersson, 27 januari 2016