Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: `TATA45`
Provkod: `TEN1`

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2015-08-27 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. Beräkna med residykalkyl
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+5)^3}.$$

2. Bestäm en Möbiusavbildning som avbildar punkterna $z_1 = 0$, $z_2 = i$ och $z_3 = \infty$ på i tur och ordning $w_1 = 2$, $w_2 = 1 - i$ och $w_3 = 0$. Bestäm sedan bilderna i w-planet av linjen $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ och cirkelskivan $|z + 2| < 2$ i z-planet.

3. Bestäm termerna till och med grad 3 i Maclaurinserien för
$$f(z) = \frac{z + e^z}{1 + \cosh z}$$
och bestäm seriens konvergensradie R. Ange också $f'''(0)$.

4. Bestäm alla konstanter $a \in \mathbf{R}$ sådana att funktionen
$$u(x, y) = x^2 + y + ay^2 + \cos x \cosh y$$
är realdel av någon hel analytisk funktion. Bestäm också, för varje sådant a, alla hela analytiska funktioner f sådana att $\operatorname{Re} f = u$. Funktionerna skall uttryckas i variabeln z, alltså som $f(z)$.

5. Bestäm antalet nollställen som funktionen
$$f(z) = z^2 + z - 2 - \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2}$$
har i enhetsskivan $|z| < 1$.

6. (a) Formulera entydighetssatsen för analytiska funktioner.
   (b) Bestäm alla $f \in A(\mathbf{C})$ sådana att $f(i/n) = 1/n$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$
   (c) Bestäm alla $g \in A(\mathbf{C})$ sådana att $g(z) = \bar{z}$ för alla z på cirkeln $|z| = 1$.

7. Antag att f är analytisk i $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ och att
$$|f(z)| \le |z| + \big|\ln|z|\big|, \qquad z \ne 0.$$
Visa att
$$|f(z)| \le |z|, \qquad |z| \ge 1.$$

TATA45 Komplex analys 2015-08-27, lösningsskisser

1. Sätt $f(z) = 1/(z^2+2z+5)^3 = (z+1+2i)^{-3}(z+1-2i)^{-3}$; vi söker $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$. f är analytisk utom i polerna $-1 \pm 2i$, som har ordning 3. Låt L_R vara sträckan från $-R$ till R och låt C_R^+ vara halvcirkeln från R till $-R$ i övre halvplanet. Om R är stort nog ($R > \sqrt{5}$) medför residysatsen (eller Cauchys integralformel för derivata) att

$$(*) \qquad \int_{L_R + C_R^+} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1+2i} f(z) = 2\pi i \, \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (z+1+2i)^{-3} \Big|_{z=-1+2i} = \frac{3\pi}{256}.$$

Vidare, eftersom $|z^2+2z+5| \geq |z|^2 - 2|z| - 5 = R^2 - 2R - 5 > 0$ på C_R^+ om R är tillräckligt stort får vi ML-uppskattningen

$$\left| \int_{C_R^+} f(z)\,dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2 - 2R - 5)^3} \to 0 \quad \text{då } R \to \infty.$$

Eftersom dessutom $\int_{L_R} f(z)\,dz \to I$ då $R \to \infty$ ger gränsövergång i $(*)$ slutligen att $I + 0 = 3\pi/256$.

Svar: $3\pi/256$.

2. Den (entydigt bestämda) Möbiusavbildning som tar trippeln $(z_1, z_2, z_3) = (0, i, \infty)$ på trippeln $(w_1, w_2, w_3) = (2, 1-i, 0)$ fås med standardmetoder: $w(z) = 2/(z+1)$.

Låt L vara linjen $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ och C cirkel*kurvan* $|z+2| = 2$. Möbiusavbildningar avbildar $\hat{\mathbf{C}}$-cirklar på $\hat{\mathbf{C}}$-cirklar, är konforma, och bevarar spegelpunkter. Vi noterar först att $z_\infty = -1$ är den punkt som avbildas på $w = \infty$, och att $z_\infty \notin L$ och $z_\infty \notin C$; således avbildas L och C på vanliga $\mathbf{C}$-cirklar $\tilde{L}$ respektive $\tilde{C}$, på formen $|w - c| = r$.

Spegelpunkten till $z = z_\infty = -1$ m.a.p. L är $z = -i$, och därmed har cirkeln $\tilde{L}$ medelpunkt $c = w(-i) = 1 + i$, och eftersom t.ex. $0 \in L$ och därmed $w(0) = 2 \in \tilde{L}$ har den radie $r = |2 - (1+i)| = \sqrt{2}$; $\tilde{L}$ är alltså cirkeln $|w - (1+i)| = \sqrt{2}$.

Spegelpunkten till $z = z_\infty = -1$ m.a.p. C är $z = 2$, så cirkeln $\tilde{C}$ har centrum $c = w(2) = 2/3$, och eftersom t.ex. $0 \in C$ och därmed $w(0) = 2 \in \tilde{C}$ har den radie $r = |2 - 2/3| = 4/3$; $\tilde{C}$ är alltså cirkeln $|w - 2/3| = 4/3$. Bilden av cirkel*skivan* $|z+2| < 2$ är antingen punkterna innanför eller utanför $\tilde{C}$, och eftersom t.ex. $z = -1$ ligger i skivan och $w(-1) = \infty$ ligger utanför $\tilde{C}$ blir bilden $|w - 2/3| > 4/3$.

Svar: $w(z) = 2/(z+1)$; bilderna är $|w - (1+i)| = \sqrt{2}$ respektive $|w - 2/3| > 4/3$.

3. Nämnaren $1 + \cosh z = 0 \Leftrightarrow e^{2z} + 2e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^z + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow z = \log(-1) = \pi i + 2n\pi i$, $n \in \mathbf{Z}$. I dessa punkter är täljaren $z + e^z \neq 0$ (har realdel $= -1$, t.ex.) så f har poler i alla dessa punkter men är analytisk för övrigt. Maclaurinserien för f konvergerar därför i skivan $|z| < R$, där R är avståndet till närmaste pol(er) från origo sett, $\pm i\pi$, så $R = \pi$.

Ansatsen $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4)$ ger efter multiplikation med $1 + \cosh z = 2 + z^2/2 + \mathcal{O}(z^4)$ och jämförelse med $z + e^z = 1 + 2z + z^2/2 + z^3/6 + \mathcal{O}(z^4)$ sambanden $2c_0 = 1$, $2c_1 = 2$, $c_0/2 + 2c_2 = 1/2$, $c_1/2 + 2c_3 = 1/6$, d.v.s. $c_0 = 1/2$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1/8$, $c_3 = -1/6$, så $f(z) = 1/2 + z + z^2/8 - z^3/6 + \mathcal{O}(z^4)$.

Slutligen är koefficienten för z^3 i Maclaurinserien $f'''(0)/3! = -1/6$, så $f'''(0) = -1$.

Svar: $f(z) = 1/2 + z + z^2/8 - z^3/6 + \mathcal{O}(z^4)$; $R = \pi$; $f'''(0) = -1$.

4. Ett nödvändigt villkor för att f skall existera är att u är harmonisk: $0 = \Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 2 + 2a$, varför $a = -1$.

När $a = -1$, och därmed $u = x^2 + y - y^2 + \cos x \cosh y$, ger Cauchy-Riemanns ekvationer först $u'_x = 2x - \sin x \cosh y = v'_y$, som integrerad m.a.p. y ger $v = 2xy - \sin x \sinh y + \varphi(x)$, där φ är en reellvärd funktion av en reell variabel. Derivering m.a.p. x och insättning i $u'_y = -v'_x$ ger sedan $\varphi'(x) = -1$, alltså $\varphi(x) = -x + A$, där A är en reell konstant. Vi får

$$f = u + iv = (x^2 + y - y^2 + \cos x \cosh y) + i(2xy - \sin x \sinh y - x + A).$$

f är alltså en hel funktion, och på realaxeln $z = x$ sammanfaller den med den hela funktionen $g(z) = z^2 + \cos z - iz + iA$. Entydighetssatsen för analytiska funktioner medför därför att $f = g$ överallt.

Svar: $a = -1$, och tillhörande $f(z) = z^2 + \cos z - iz + iA$, $A \in \mathbf{R}$.

5. f har dubbelpol i origo, och inga andra singulariteter, så om C är enhetscirkeln $|z| = 1$ tagen ett varv moturs är $P = 2$, där P är antalet poler som f har innanför C. Vi söker antalet nollställen N som f har innanför C.

   Vi parametriserar C med $z = e^{i\theta}$, $\theta : -\pi \to \pi$, och får, med Eulers identitet och sambandet $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, att

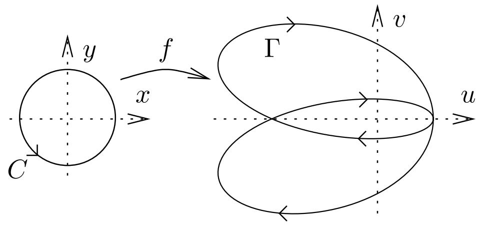
$$\begin{aligned} w = f(e^{i\theta}) &= e^{2i\theta} + e^{i\theta} - 2 - e^{-i\theta} + 3\,e^{-2i\theta} = (4\cos 2\theta - 2) + i(2\sin\theta - 2\sin 2\theta) \\ &= (4\cos 2\theta - 2) + i(2 - 4\cos\theta)\sin\theta = u(\theta) + i\,v(\theta). \end{aligned}$$

   I parameterintervallet $-\pi \le \theta \le \pi$ har u nollställena $\theta = \pm\pi/6$ och $\theta = \pm 5\pi/6$ medan v har nollställena $\theta = 0$, $\theta = \pm\pi/3$ och $\theta = \pm\pi$. Vi får följande teckentabell för u och v och tillhörande kvadrantvandring i w-planet:

θ	$-\pi$	$<$	$-\frac{5\pi}{6}$	$<$	$-\frac{\pi}{3}$	$<$	$-\frac{\pi}{6}$	$<$	0	$<$	$\frac{\pi}{6}$	$<$	$\frac{\pi}{3}$	$<$	$\frac{5\pi}{6}$	$<$	π
u	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
v	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
kvadr.		4		3		2		1		4		3		2		1	

   Till höger ser vi den kurva $\Gamma = f(C)$ vi får i w-planet, och kan där avläsa att

$$\Delta_C \arg f(z) = \Delta_\Gamma \arg w = -4\pi.$$



   Enligt argumentprincipen är således $N - P = -2$, och eftersom $P = 2$ inser vi att $N = 0$, d.v.s. att f saknar nollställen i enhetsskivan $|z| < 1$.

   Svar: Noll.

6. (a) Om Ω är ett område i vilket f och g är analytiska och $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ har hopningspunkt i Ω, så är $f(z) = g(z)$ för alla $z \in \Omega$.

   (b) Låt $h(z) = -iz$ och $\Omega = \mathbf{C}$. Vi ser att $f, h \in A(\mathbf{C})$, $f(i/n) = 1/n = h(i/n)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$, och $i/n \to 0 \in \mathbf{C}$ då $n \to \infty$. Enligt 6a är därför $f = h$ i $\mathbf{C}$. Svar: $f(z) = -iz$.

   (c) $\bar{z} = 1/z$ på cirkeln $C : |z| = 1$, och vi sätter därför $h(z) = 1/z$ och $\Omega = \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Eftersom $g, h \in A(\mathbf{C}^*)$ och $g = h$ på hela cirkeln C, som har hopningspunkt i $\mathbf{C}^*$, medför 6a att $g = h$ i $\mathbf{C}^*$. Men g skall vara analytisk också i origo, vilket strider mot att $1/z$ saknar ändligt gränsvärde då $z \to 0$. Svar: Finns ingen.

7. Sätt $g(z) = f(z)/z$. Då är g analytisk i $\mathbf{C}^*$ och

$$|g(z)| \le 1 + \frac{\big|\ln|z|\big|}{|z|}, \qquad z \ne 0.$$

   Fixera z med $|z| \ge 1$ och låt $R > |z|$. Eftersom $|g(s)| \le 1$ då $|s| = 1$ och $|g(s)| \le 1 + (\ln R)/R$ då $|s| = R$ medför maximumprincipen tillämpad på ringen $1 \le |s| \le R$, som ju innehåller z, att

$$|g(z)| \le \max\bigl(1, 1 + \frac{\ln R}{R}\bigr) = 1 + \frac{\ln R}{R}.$$

   Men detta gäller för alla $R > |z|$, och eftersom $(\ln R)/R \to 0$ då $R \to \infty$ inser vi att $|g(z)| \le 1$, d.v.s. att $|f(z)| \le |z|$, vilket skulle bevisas.

TATA45 Komplex analys 2015-08-27, kommentarer

1. Integralen är rent reell, så ett icke-reellt svar är orimligt. Dessutom bör man se att integranden är positiv och därmed att integralens värde måste vara positivt.

   I ML-uppskattningen kan man också använda faktoriseringen $z^2+2z+5=(z+1+2i)(z+1-2i)$ och att $|z+(1\pm 2i)| \geq |z|-|1\pm 2i| = R-\sqrt{5} > 0$ (eller $|z+(1\pm 2i)| \geq |z|-|1|-|2i| = R-3 > 0$) på C_R^+ för stora R och därmed att $\left|\int_{C_R^+} f(z)\,dz\right| \leq \pi R/(R-\sqrt{5})^6 \to 0$ då $R\to\infty$.

2. Vid bestämningen av bilden $\tilde{C}$ i w-planet kan man också använda sig av konformitet. Eftersom

   - realaxeln i z-planet avbildas på realaxeln i w-planet (koefficienterna i $w(z)$ är ju reella)
   - C skär realaxeln i z-planet vinkelrätt i punkterna $z=-4$ och $z=0$

   följer det att $\tilde{C}$ skär realaxeln i w-planet vinkelrätt i punkterna $w(-4)=-2/3$ och $w(0)=2$, och därmed att $\tilde{C}$ är en vanlig cirkel med centrum mitt emellan: $c=2/3$. Ett vanligt FEL är att tro att det räcker att påpeka att $\tilde{C}$ innehåller punkterna $-2/3$ och 2 och är en vanlig cirkel; det finns ju oändligt många andra cirklar än just $|w-2/3|=4/3$ som gör det, t.ex. cirkeln $|w-(2/3+i)|=5/3$.

3. Det går också bra att använda standardutveckligen $(1+s)^{-1}=1-s+\mathcal{O}(s^2)$, med $s=z^2/4+\mathcal{O}(z^4)$ i steg $*$ nedan, för att få utvecklingen av $f(z)$ utan ansats:

$$f(z)=\frac{z+e^z}{1+\cosh z}=\frac{1+2z+z^2/2+z^3/6+\mathcal{O}(z^4)}{2+z^2/2+\mathcal{O}(z^4)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+2z+z^2/2+z^3/6+\mathcal{O}(z^4)}{1+z^2/4+\mathcal{O}(z^4)}$$
$$\overset{*}{=}\frac{1}{2}\big(1+2z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\mathcal{O}(z^4)\big)\big(1-\frac{z^2}{4}+\mathcal{O}(z^4)\big)=\frac{1}{2}+z+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{6}+\mathcal{O}(z^4).$$

   Några använder utvecklingen $(1+s)^{-1}=1-s+\mathcal{O}(s^2)$ men med $s=1+z^2/2+\mathcal{O}(z^4)$, och de tror att $\mathcal{O}(s^2)=\mathcal{O}(z^4)$ (FEL); i själva verket blir $\mathcal{O}(s^2)=\mathcal{O}(1)$ i så fall, och hela utvecklingen blir intetsägande: $f(z)=\mathcal{O}(1)$, och inga koefficienter kan avläsas över huvud taget.

   Vid bestämningen av konvergensradien kan man också använda att $\cosh z=\cos(iz)$ och därmed att $\cosh z=-1$ precis då $iz=\pi+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$, vilket direkt ger singulariteterna för f.

   (Notera att allt utom bestämningen av konvergensradien R är sådant som tas upp redan i TATA42 Envariabelanalys 2.)

4. Det är enklast att bestämma a m.h.a. villkoret $\Delta u=0$, som i lösningsskissen. Alternativt kan man låta a vara kvar och använda Cauchy-Riemanns ekvationer direkt. Med samma väg som i lösningsskissen får man i så fall att $\varphi'(x)=-1-(2+2a)y$. Notera att högerledet i denna ekvation beror på y när $a\neq -1$, och det krävs alltså att $a=-1$ för att vi skall undvika en motsägelse – vänsterledet får ju bara bero på x.

5. Eftersom $f(z)=g(z)/z^2$ med $g(z)=z^4+z^3-2z^2-z+3$, och $f(z)=0$ precis då $g(z)=0$, skulle man kunna försöka använda Rouchés sats på $g(z)$. Tyvärr finns det ingen uppdelning i en summa av två funktioner som fungerar, så (den mera kraftfulla) argumentprincipen måste användas.

   Som vanligt räcker det att faktorisera den ena av u och v fullständigt, se kompendiet. Dessutom kan man i denna uppgift utnyttja att u är jämn och v är udda.

6. I (a) godkänns följande specialfall: Om f och g är hela analytiska funktioner och $f(x)=g(x)$ för alla $x\in\mathbf{R}$, så är $f(z)=g(z)$ för alla $z\in\mathbf{C}$.

   I (b) och (c) duger dock inte ovanstående variant av entydighetssatsen, utan där behövs den allmänna varianten (se lösningsskissen).

7. Alternativt kan man m.h.a. Cauchys olikheter visa att alla koefficienter utom c_0 och c_1 i utvecklingen $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, $z\in\mathbf{C}^*$, måste vara noll; alltså är $f(z)=c_0+c_1 z$. Eftersom $|f(z)|\leq 1$ då $|z|=1$ och $\max_{|z|=1}|f(z)|=|c_0|+|c_1|$ får vi olikheten $|c_0|+|c_1|\leq 1$, vilket i sin tur ger den sökta olikheten när $|z|\geq 1$: $|c_0+c_1 z|\leq |c_0|+|c_1||z|\leq |c_0||z|+|c_1||z|=(|c_0|+|c_1|)|z|\leq |z|$.

Lars Alexandersson, 7 september 2015