Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA45
Provkod: TEN1

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2015-04-10 kl 08.00–13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 15.00.

1. Lös ekvationerna

   (a) $2z^2 + (1-3i)z - 2 = 0$ (b) $4\sin z = 3 + i$ (c) $|e^z| = e^{|z|}$.

   Svaren skall ges i rektangulär form, alltså i formen $a + ib$.

2. Bestäm alla hela analytiska funktioner $f = u + iv$ sådana att

$$v = \operatorname{Im} f = e^{-x}(y\cos y - x\sin y) - x, \qquad f(0) = 1.$$

   f skall uttryckas i variabeln z, alltså som $f(z)$.

3. Bestäm antalet nollställen som polynomet

$$p(z) = z^5 - 4z^4 + iz^3 + iz - 2i$$

   har i (a) övre halvplanet $\operatorname{Im} z > 0$ (b) området $|z| > 2$. (2p+1p)

4. Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}\,dx}{(x+2i)^2(x-i)}, \qquad a \in \mathbf{R}.$$

5. Låt Ω vara det område som bestäms av olikheterna $|z+1| > 1$ och $|z-1| > 1$.

   (a) Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som tar Ω på remsan $-1 < \operatorname{Re} w < 1$. (2p)

   (b) Bestäm en harmonisk funktion ψ i Ω sådan att $\psi = 0$ då $|z+1| = 1$ och $\psi = 1$ då $|z-1| = 1$ (punkten $z = 0$ undantas i båda). (1p)

6. Beräkna summan $f(z)$ av den dubbelsidiga potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{n+1}$$

   i största möjliga ring $R_1 < |z| < R_2$ där den konvergerar. Ange också R_1 och R_2 samt beräkna

$$\int_{C_\rho} f(z)\,dz, \qquad R_1 < \rho < R_2,$$

   där C_ρ är cirkeln $|z| = \rho$ tagen ett varv i positiv led.

7. Låt U vara enhetsskivan $|z| < 1$, och antag att f är analytisk och nollskild i U. Visa att det finns en funktion h som är analytisk i U och som har egenskapen att $f = \exp h$ där.

   Ledning: Sätt $g = f'/f$ till att börja med.

TATA45 Komplex analys 2015-04-10, lösningsskisser

1. (a) $2z^2 + (1-3i)z - 2 = 0 \Leftrightarrow \big(z + (1-3i)/4\big)^2 = (8-6i)/16 = 1/2 - 3i/8$. Variabelbytet $z + (1-3i)/4 = w = u + iv$ ger $u^2 - v^2 = 1/2$, $2uv = -3/8$ och $u^2 + v^2 = 5/8$ med lösningarna $w = \pm(3-i)/4$, och därmed får vi $z_1 = (1+i)/2$ och $z_2 = -1+i$.

   (b) Med $s = e^{iz}$ kan ekvationen skrivas $4(s - 1/s)/2i = 3 + i$, alltså $2s^2 + (1-3i)s - 2 = 0$, som enligt (a) har lösningarna $s_1 = (1+i)/2$ och $s_2 = -1+i$. Eftersom $z = -i \log s = \arg s - i \ln|s|$ får vi lösningarna $z = \pi/4 + 2n\pi + i(\ln 2)/2$ och $z = 3\pi/4 + 2n\pi - i(\ln 2)/2$, $n \in \mathbf{Z}$.

   (c) Med $z = x + iy$ är $|e^z| = e^x$, så $|e^z| = e^{|z|}$ precis då $x = |z|$ (eftersom den *reella* exponentialfunktionen är injektiv), d.v.s. precis då $z = x \geq 0$.

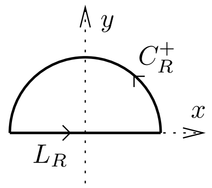
2. Cauchy-Riemanns ekvationer ger först $v'_y = e^{-x}(\cos y - y \sin y - x \cos y) = u'_x$, som integrerad m.a.p. x (med partiell integration) ger $u = e^{-x}(y \sin y + x \cos y) + \varphi(y)$, där φ är en reellvärd funktion av en reell variabel. Derivering m.a.p. y och insättning i $u'_y = -v'_x$ ger sedan $\varphi'(y) = 1$, alltså $\varphi(y) = y + A$, där A är en reell konstant. Vi får

$$f = u + iv = \big(e^{-x}(y \sin y + x \cos y) + y + A\big) + i\big(e^{-x}(y \cos y - x \sin y) - x\big),$$

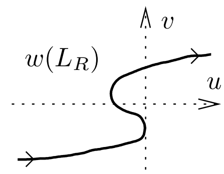
och eftersom $f(0) = 1$ får vi $A = 1$. f är alltså en hel funktion, och på realaxeln $z = x$ (där $y = 0$) är $f(x) = e^{-x}x + 1 - ix$, och därmed sammanfaller f med den hela funktionen $g(z) = e^{-z}z + 1 - iz$ på realaxeln. Entydighetssatsen för analytiska funktioner ger därför att $f = g$ i hela planet.

Svar: $f(z) = e^{-z}z + 1 - iz$.

3. (a) Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^5 - 4z^4 + iz^3 + iz - 2i$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R^+ + L_R$ (se figur nere till vänster). På C_R^+ får vi tillskottet $\Delta_{C_R^+} \arg p(z) = \Delta_{C_R^+} \arg z^5 + \Delta_{C_R^+} \arg\big(1 - 4/z + i/z^2 + i/z^4 - 2i/z^5\big) \to 5 \cdot \pi + 0 = 5\pi$ då $R \to \infty$. På L_R får vi $p(z) = p(x) = (x^5 - 4x^4) + i(x^3 + x - 2) = u + iv$, där $u = x^4(x-4)$ och $v = (x-1)(x^2+x+2)$, och därmed nedanstående teckentabell:



x	$<$	0	$<$	1	$<$	4	$<$
u	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
v	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$



Dessutom får vi av gradskäl att $v/u \to 0$ då $x \to \pm\infty$ (u drar mer än v), och detta tillsammans med tabellen ovan ger figuren ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{L_R} \arg p(z) \to -\pi$ då $R \to \infty$. Antalet nollställen i övre halvplanet blir därför $(1/2\pi)\lim_{R\to\infty}\big(\Delta_{C_R^+} \arg p(z) + \Delta_{L_R} \arg p(z)\big) = (5\pi - \pi)/2\pi = 2$, eftersom poler saknas. Svar: Två.

   (b) Sätt $f(z) = -4z^4$ och $g(z) = z^5 + iz^3 + iz - 2i$. På cirkeln $|z| = 2$ är $|f(z)| = 4|z|^4 = 64$ medan $|g(z)| \leq |z|^5 + |z|^3 + |z| + 2 = 44$, så $|f(z)| > |g(z)|$ på hela denna cirkel. Rouchés sats medför därför att polynomet $p(z) = f(z) + g(z)$ har lika många nollställen i $|z| \leq 2$ som $f(z)$, alltså 4. Eftersom polynomet p har grad 5, och därmed har 5 nollställen totalt i $\mathbf{C}$, har det därför $5 - 4 = 1$ nollställe i området $|z| > 2$. Svar: Ett.

4. Låt $f_a(z) = e^{iaz}/\big((z+2i)^2(z-i)\big)$ för fixt $a \in \mathbf{R}$, och sätt $I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)\,dx$, som är den sökta integralen. Låt vidare L_R vara sträckan från $z = -R$ till $z = R$, C_R^+ halvcirkeln från $z = R$ till $z = -R$ i övre halvplanet, och C_R^- halvcirkeln från $z = -R$ till $z = R$ i undre halvplanet. På både C_R^+ och C_R^- är $|z + 2i| \geq |z| - |2i| = R - 2 > 0$ och $|z - i| \geq |z| - |i| = R - 1 > 0$ för stora R ($R > 2$). Dessutom är $|e^{iaz}| = e^{-ay} \leq 1$ när $ay \geq 0$.

För att beräkna $I(a)$ när $a \geq 0$ använder vi konturen $C_R^+ + L_R$, ty ML-uppskattning ger i det fallet att $|\int_{C_R^+} f_a(z)\,dz| \leq \pi R/\big((R-2)^2(R-1)\big) \to 0$ då $R \to \infty$, eftersom $y \geq 0$ på C_R^+. Residysatsen (eller Cauchys integralformel) ger, för stora R, att

$$\int_{C_R^+ + L_R} f_a(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f_a(z) = 2\pi i\big(e^{iaz}(z+2i)^{-2}\big)_{|z=i} = -\frac{2\pi i}{9}e^{-a},$$

och genom att låta $R \to \infty$ här får vi $0 + I(a) = -2\pi i e^{-a}/9$ för $a \geq 0$.

För att beräkna $I(a)$ när $a \leq 0$ använder vi i stället konturen $C_R^- - L_R$ och får analogt att $|\int_{C_R^-} f_a(z)\,dz| \leq \pi R/\big((R-2)^2(R-1)\big) \to 0$ då $R \to \infty$, eftersom $y \leq 0$ på C_R^-. Residysatsen (eller Cauchys integralformel för derivata) ger, för stora R, att

$$\int_{C_R^- - L_R} f_a(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2i} f_a(z) = 2\pi i \frac{d}{dz}\big(e^{iaz}(z-i)^{-1}\big)_{|z=-2i} = \frac{2\pi i}{9}(1-3a)e^{2a},$$

och genom att låta $R \to \infty$ här får vi $0 - I(a) = 2\pi i(1-3a)e^{2a}/9$ för $a \leq 0$.

<u>Svar</u>: $-\dfrac{2\pi i}{9}e^{-a}$ för $a \geq 0$; $-\dfrac{2\pi i}{9}(1-3a)e^{2a}$ för $a \leq 0$.

5. $\hat{\mathbf{C}}$-cirklarna $C_0 : |z+1| = 1$ och $C_1 : |z-1| = 1$ har endast punkten $z = 0$ gemensam (och där tangerar de varandra, rita figur!), så varje Möbiusavbildning $w(z)$ för vilken $w(0) = \infty$ kommer att avbilda dessa $\hat{\mathbf{C}}$-cirklar på två linjer som saknar gemensam punkt i $\mathbf{C}$ och som därmed är parallella i $\mathbf{C}$ (och tangerar varandra i $\infty \in \hat{\mathbf{C}}$).

   Genom att komplettera $w(0) = \infty$ med $w(-2) = -1$ och $w(2) = 1$, så att $w = 2/z$, kommer C_0 att avbildas på en linje genom $w = -1$ medan cirkeln C_1 avbildas på en linje genom $w = 1$. Vidare, eftersom realaxeln avbildas på realaxeln under $w = 2/z$ och skärningsvinklar bevaras, inser vi att C_0 avbildas på $\operatorname{Re} w = -1$ och C_1 på $\operatorname{Re} w = 1$. Slutligen, då t.ex. $z = \infty$ är en inre punkt i Ω och $w(\infty) = 0$, får vi att bilden av Ω blir remsan $-1 < \operatorname{Re} w < 1$.

   En harmonisk funktion i w-planet med rätt randvärden ($\psi = 0$ då $\operatorname{Re} w = -1$ och $\psi = 1$ då $\operatorname{Re} w = 1$) är $\psi = 1/2 + \operatorname{Re}(w)/2 = 1/2 + u/2$, så $\psi(z) = 1/2 + \operatorname{Re}(1/z) = 1/2 + x/(x^2+y^2)$ löser problemet i z-planet.

   <u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{2}{z}$ (t.ex.); $\psi(z) = \dfrac{1}{2} + \operatorname{Re}\big(\dfrac{1}{z}\big) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

6. Den vänstra seriens summa får vi direkt från den geometriska serien, $\sum_{k=0}^{\infty} w^k = 1/(1-w)$ när $|w| < 1$, med $w = -1/2z$ när $|z| > 1/2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n z^n} = -\frac{1}{2z}\left(1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{(2z)^2} - \frac{1}{(2z)^3} + \dots\right) = -\frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1-(-1/2z)} = -\frac{1}{2z+1}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

   Den högra seriens summa kan beräknas m.h.a. uppdelningen $n^2/(n+1) = (n-1) + 1/(n+1)$. Vi studerar

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n+1} = z\sum_{k=0}^{\infty} kz^k + \frac{1}{z}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^k}{k}.$$

   Termvis derivering av $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1/(1-z)$ när $|z| < 1$ ger $\sum_{k=0}^{\infty} kz^{k-1} = 1/(1-z)^2$, så $\sum_{k=0}^{\infty} kz^k = z/(1-z)^2$ när $|z| < 1$. Standardserien $\operatorname{Log}(1+w) = w - w^2/2 + w^3/3 - w^4/4 + \dots$ för $|w| < 1$, använd för $w = -z$, ger $\sum_{k=1}^{\infty} z^k/k = -\operatorname{Log}(1-z)$ när $|z| < 1$, varför $\sum_{k=2}^{\infty} z^k/k = -\operatorname{Log}(1-z) - z$ när $|z| < 1$. Alltså konvergerar serierna i $(*)$ i området $|z| < 1$, och sammantaget blir

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n z^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 z^n}{n+1} = -\frac{1}{2z+1} + \frac{z^2}{(1-z)^2} - \frac{\operatorname{Log}(1-z)}{z} - 1, \qquad \frac{1}{2} < |z| < 1;$$

   speciellt är $R_1 = 1/2$ och $R_2 = 1$.

   Slutligen, eftersom $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ i ringen $R_1 < |z| < R_2$ och $c_n = (1/2\pi i)\int_{C_\rho}\big(f(s)/s^{n+1}\big)\,ds$ när $n \in \mathbf{Z}$ och $R_1 < \rho < R_2$, är, med $n = -1$ (direkt avläsning i serien ger $c_{-1} = -1/2$)

$$\int_{C_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot c_{-1} = 2\pi i\big(-\frac{1}{2}\big) = -i\pi, \qquad \frac{1}{2} < \rho < 1.$$

7. Eftersom f är analytisk och nollskild i U är också $g = f'/f$ analytisk i U, så $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ när $z \in U$, där Maclaurinseriens konvergensradie $R \geq 1$. Termvis integrering medför att funktionen $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1}/(n+1)$ är en primitiv till g i U; m.a.o. är $G' = g$ där. Multiplikation av identiteten $f' - fg = 0$ med $e^{-G} \neq 0$ (integrerande faktor, analytisk) ger $(fe^{-G})' = 0$ i U, så $fe^{-G} = C$, en nollskild konstant, i U. Tag $c \in \mathbf{C}$ sådant att $e^c = C$ och låt $h = G + c$. Då blir $e^h = e^G e^c = e^G C = f$ i U, och beviset är klart.

TATA45 Komplex analys 2015-04-10, kommentarer

1. (a) Några svarar med uttryck innehållande $\sqrt{8-6i}$, vilket inte duger. Till att börja med är det oklart vilket eller vilka tal detta är (vi har inte definierat $\sqrt{z}$ i denna kurs, däremot den tvåvärda $z^{1/2}$), och dessutom skall svaret ändå ges i rektangulär form $z = a + ib$, $a, b \in \mathbf{R}$.

   (b) Svaret måste naturligtvis förenklas så långt som möjligt.

   (c) Många tror att ekvationen $x = |z|$, d.v.s. $x = \sqrt{x^2 + y^2}$, har lösningarna $z = x \in \mathbf{R}$ (FEL) i stället för det korrekta $z = x \geq 0$; notera att $x = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 = x^2 + y^2$ OCH $x \geq 0$ (se rotekvationer i Matematisk grundkurs). Några tappar $x = 0$ och svarar $z = x > 0$ (FEL).

2. Några tar en onödigt jobbig väg och integrerar både $u'_x = v'_y$ (m.a.p. x) och $u'_y = -v'_x$ (m.a.p. y), och försöker sedan pussla ihop dessa båda uttryck för u till ett enda uttryck för u, oftast på mycket oklara sätt; framför allt framgår det normalt inte att man har hittat *alla* lösningar.

3. (a) Det vanligaste felet här är att tro att $\Delta_{L_R} \arg p(z) \to \pi$ (FEL) i stället för det korrekta $-\pi$ när $R \to \infty$, även om man har en korrekt figur i w-planet. Många av dem som har gjort detta fel har inte markerat orienteringen (med pilar) på kurvan i w-planet, vilket också kan förklara varför de läser av fel. Sens moral: Var noga med orienteringen!

   Som vanligt räcker det att faktorisera den ena av u och v, som i Exempel 6.5 i kompendiets upplaga 2014.

   (b) Några tror att Rouchés sats kan tillämpas direkt på området $|z| > 2$ (FEL), och får då att p har 4 nollställen där (FEL).

   Många kommer fram till att p har 4 nollställen i $|z| < 2$, vilket är rätt, men säger sedan direkt att antalet nollställen i $|z| > 2$ är $5 - 4 = 1$, utan att nämna att p saknar nollställen i de återstående punkterna, alltså på själva cirkeln $|z| = 2$. Notera att Rouchés sats medför att p har 4 nollställen inte bara i $|z| < 2$ utan i själva verket i $|z| \leq 2$, se kompendiet.

   I denna Rouchéuppgift förekommer det också ett antal ”klassiska” fel i lösningarna. Se kommentarerna till uppgift 2b på tentamen 2011-12-20 för en allmän diskussion.

4. Det vanligaste felet här är att tro att samma kontur $(C_R^+ + L_R)$ fungerar för alla reella a (FEL). Det faktum att $|e^{iaz}| = e^{-ay}$ tvingar oss att använda olika konturer för $a \geq 0$ och $a \leq 0$.

   I fallet $a \leq 0$ använder några residysatsen direkt på konturen $L_R - C_R^-$ utan att lägga märke till att den konturen är *negativt* orienterad, vilket medför att man gör ett teckenFEL.

5. (a) Avbildningen $w = 2/z$ är inte den enda möjliga: *Alla* avbildningar som avbildar som önskat kan skrivas $w = \pm 2/z + ib$, $b \in \mathbf{R}$.

   Många resonerar som om varje Möbiusavbildning $w(z)$ med automatik avbildar realaxeln i z-planet på realaxeln i w-planet (FEL); så sker om och endast om $w(z)$ kan skrivas helt med reella koefficienter. När man väl har konstruerat $w = 2/z$ (eller $w = -2/z$), med två $\hat{\mathbf{C}}$-tripplar, kan man dock dra slutsatsen att realaxeln verkligen avbildas på realaxeln.

   (b) Även om flera avbildningar $w(z)$ är möjliga blir den harmoniska funktionen ψ densamma.

6. R_1 och R_2 kan också bestämmas med rot- och kvotkriterierna.

7. Observera att uppgiften går ut på att visa att funktionen h verkligen existerar, och resonemang som förutsätter att h existerar duger naturligtvis inte.

Lars Alexandersson, 20 april 2015