Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: `TATA45`
Provkod: `TEN1`

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2015-01-17 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan senast kl 21.00.

1. Bestäm Laurentserien för funktionen
$$f(z) = \frac{3z}{z^2 + iz + 2}$$
i området $1 < |z| < 2$.

2. Beräkna
$$\int_C \frac{dz}{(z - 1/3)^2 \sin \pi z}$$
där C är cirkeln $|z - 1/2| = 1$ genomlöpt ett varv moturs.

3. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som tar linjen $\operatorname{Im} z = 1$ på cirkeln $|w + 2| = 3$ samtidigt som $w(2i) = 0$ och $w(\infty) = 1$. Bestäm sedan bilden i w-planet av linjen $\operatorname{Re} z = 1$ i z-planet.

4. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^3 + z^2 - iz + 8i$$
har i andra kvadranten $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

5. Beräkna
$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$$
genom att integrera funktionen $(1 - e^{i2z})/z^2$ längs randen till området $\epsilon < |z| < R$, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$. Vilken (helt) annan reell integral $\int_0^\infty g(x)\, dx$ får man på köpet?

6. Låt Ω vara komplexa planet $\mathbf{C}$ med positiva realaxeln $[0, +\infty[$ borttagen. Visa att man kan definiera en gren f till den flervärda funktionen
$$z \mapsto \log(1 + z^{1/2})$$
i Ω sådan att $f(-1) = (\ln 2)/2 + 7\pi i/4$. Beräkna sedan $f(-3)$ och $f'(-1)$; dessa värden skall ges i formen $a + ib$, och i så enkel form som möjligt.

7. Låt U vara enhetsskivan $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$.
   (a) Bestäm om möjligt en funktion f som är analytisk i $\mathbf{C}$ och som har värdemängd U, eller visa att en sådan funktion inte finns.
   (b) Bestäm om möjligt en funktion g som är analytisk i U och som har värdemängd $\mathbf{C}$, eller visa att en sådan funktion inte finns.

TATA45 Komplex analys 2015-01-17, lösningsskisser

1. Partialbråksuppdelning och utveckling i geometriska serier ger att

$$\frac{3z}{z^2+iz+2} = \frac{3z}{(z-i)(z+2i)} = \frac{1}{z-i} + \frac{2}{z+2i} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-i/z} + \frac{2}{2i}\cdot\frac{1}{1+z/2i}$$
$$= [\text{ eftersom } 1<|z|<2\ ] = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{i}{z}\Big)^n - i\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z}{2i}\Big)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}} - i\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{i}{2}\Big)^n z^n, \qquad 1<|z|<2.$$

2. Innanför $C: |z-1/2|=1$ har $f(z) = 1/\big((z-1/3)^2\sin\pi z\big)$ dubbelpolen $z=1/3$ och enkelpolerna $z=0$ och $z=1$; notera att $\sin\pi z = 0 \Leftrightarrow z=n,\ n\in\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$. Vi får residyerna

$$\operatorname*{Res}_{z=1/3} f(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sin\pi z}\right)\Big|_{z=1/3} = \frac{-\pi\cos(\pi/3)}{\sin^2(\pi/3)} = -\frac{2\pi}{3}$$

och

$$\operatorname*{Res}_{z=n} f(z) = \frac{1/(z-1/3)^2}{\frac{d}{dz}(\sin\pi z)}\Big|_{z=n} = \frac{1/(n-1/3)^2}{\pi\cos\pi n} = \begin{cases} 9/\pi, & n=0,\\ -9/4\pi, & n=1,\end{cases}$$

så residysatsen medför att

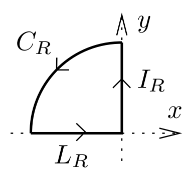
$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{9}{\pi}-\frac{9}{4\pi}\right) = \left(\frac{27}{2}-\frac{4\pi^2}{3}\right)i.$$

3. Låt L vara linjen $\operatorname{Im} z = 1$ och $\tilde{L}$ cirkeln $|w+2|=3$. Att $w(2i)=0$ ger med nödvändighet att $w(0)=5/2$, ty $2i$ och 0 är spegelpunkter m.a.p. L och 0 och $5/2$ är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{L}$. Eftersom dessutom $\infty\in L$, $1\in\tilde{L}$ och $w(\infty)=1$ är Möbiusavbildningen entydigt bestämd: $w(z) = (5z-10i)/(5z-4i)$, och avbildar som önskat.

   Låt Γ vara linjen $\operatorname{Re} z = 1$. Vi ser att $w(4i/5)=\infty$, och eftersom $4i/5\notin\Gamma$ är bilden $\tilde{\Gamma}$ i w-planet en vanlig cirkel $|w-c|=r$. Centrum $c = w(2+4i/5) = 1-3i/5$, ty $4i/5$ och $2+4i/5$ är spegelpunkter m.a.p. Γ och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{\Gamma}$. Slutligen, t.ex. $w(\infty)=1\in\tilde{\Gamma}$, så radien $r = |1-(1-3i/5)| = 3/5$ och därmed är $\tilde{\Gamma}$ cirkeln $|w-(1-3i/5)|=3/5$.

   Svar: $w(z) = \dfrac{5z-10i}{5z-4i}$; bilden är cirkeln $\left|w-\big(1-\dfrac{3i}{5}\big)\right| = \dfrac{3}{5}$.

4. Studera argumenttillskottet för $p(z) = z^3+z^2-iz+8i$ när z genomlöper konturen $C_R+L_R+I_R$ (se figur nere till vänster). Vi får att $\Delta_{C_R}\arg p(z) = \Delta_{C_R}\arg z^3 + \Delta_{C_R}\arg(1+1/z-i/z^2+8i/z^3) \to 3\cdot\pi/2+0 = 3\pi/2$ då $R\to\infty$. På L_R är $p(z)=p(x)=x^2(x+1)+i(8-x)=u+iv$, där $x:-R\to 0$, och på I_R är $p(z)=p(iy)=(1-y)y+i(8-y^3)=u+iv$, där $y:0\to R$, varför vi får nedanstående teckentabeller och kurva $w=p(z)$ när z genomlöper L_R+I_R; notera också att $v/u\to 0$ då $x\to-\infty$ och att $u/v\to 0$ då $y\to+\infty$.

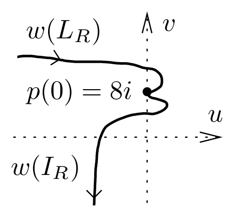


L_R:

x	$<$	-1	$<$	0
u	$-$	0	$+$	0
v	$+$	$+$	$+$	8

I_R:

y	0	$<$	1	$<$	2	$<$
u	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
v	8	$+$	$+$	$+$	0	$-$



   Således får vi att $\Delta_{L_R+I_R}\arg p(z)\to\pi/2$ då $R\to\infty$, så antalet nollställen för p i andra kvadranten är

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\Delta_{C_R+L_R+I_R}\arg p(z) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

   eftersom poler saknas, allt enligt argumentprincipen. Svar: Ett nollställe.

5. Randen kan skrivas $\Gamma_{\epsilon,R} = L^1_{\epsilon,R} + C_R + L^2_{\epsilon,R} + C_\epsilon$, som i tur och ordning är sträckan från ϵ till R; kvartscirkeln från R till iR; sträckan från iR till $i\epsilon$; och kvartscirkeln från $i\epsilon$ till ϵ (rita figur!). Funktionen $f(z) = (1 - e^{i2z})/z^2$ är analytisk på och innanför $\Gamma_{\epsilon,R}$, så Cauchys integralsats medför att

$$(*) \qquad \int_{L^1_{\epsilon,R}} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{L^2_{\epsilon,R}} f(z)\,dz + \int_{C_\epsilon} f(z)\,dz = 0, \qquad 0 < \epsilon < R.$$

Parametriseringarna $z = t$, $t : \epsilon \to R$, av $L^1_{\epsilon,R}$, och $z = it$, $t : R \to \epsilon$, av $L^2_{\epsilon,R}$, ger, med omskrivningen $1 - \cos 2t = 2\sin^2 t$, att

$$\begin{aligned}\int_{L^1_{\epsilon,R}} f(z)\,dz + \int_{L^2_{\epsilon,R}} f(z)\,dz &= \int_\epsilon^R \frac{1 - e^{i2t}}{t^2}\,dt + \int_R^\epsilon \frac{1 - e^{-2t}}{(it)^2}\,i\,dt \\ &= \int_\epsilon^R \left(\frac{2\sin^2 t}{t^2} + i\,\frac{1 - e^{-2t} - \sin 2t}{t^2} \right) dt.\end{aligned}$$

På C_R är $|e^{i2z}| = e^{-2y} \le 1$, och därmed är $|f(z)| \le 2/R^2$ där, så

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \le \frac{2}{R^2} \cdot \frac{\pi R}{2} \to 0, \qquad R \to \infty,$$

med ML-uppskattning.

Det återstår att se vad som händer med integralen längs den lilla kvartscirkeln C_ϵ då $\epsilon \to 0^+$. Eftersom f har enkelpol med residy $c_{-1} = -2i$ i punkten $z_0 = 0$ finns det en funktion g som är analytisk i 0 sådan att

$$f(z) = -\frac{2i}{z} + g(z), \qquad \text{så} \quad \int_{C_\epsilon} f(z)\,dz = -\pi + \int_{C_\epsilon} g(z)\,dz \to -\pi, \qquad \epsilon \to 0^+,$$

eftersom parametriseringen $z = \epsilon\, e^{i\theta}$, $\theta : \pi/2 \to 0$, ger att $-2i \int_{C_\epsilon} dz/z = \int_{\pi/2}^0 2\,d\theta = -\pi$, och $\int_{C_\epsilon} g(z)\,dz \to 0$ då $\epsilon \to 0^+$, eftersom g är kontinuerlig i $z_0 = 0$.

Genom att låta $\epsilon \to 0^+$ och $R \to \infty$ i $(*)$ och till sist ta real- och imaginärdelar, får vi integralerna

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{(sökt)} \qquad \text{och} \qquad \int_0^\infty \frac{1 - e^{-2t} - \sin 2t}{t^2}\,dt = 0 \quad \text{(på köpet)}.$$

6. Sätt $\Omega = \mathbf{C} \setminus [0, +\infty[$. I Ω skriver vi $z = re^{i\theta}$, där $r > 0$ och $0 < \theta < 2\pi$, och där har $z^{1/2}$ de två grenarna $h_\pm(z) = \pm\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$. Notera att $\operatorname{Im}\big(1 + h_\pm(z)\big) = \pm\sqrt{r}\sin(\theta/2) \ne 0$ i Ω, så $1 + h_\pm$ är aldrig reella i Ω, speciellt aldrig ≤ 0 där, och därför kan alla grenar till $\log(1 + z^{1/2})$ i Ω skrivas

$$f_{m,\pm}(z) = \operatorname{Log}\big(1 + h_\pm(z)\big) + 2\pi m i, \qquad m \in \mathbf{Z},$$

där Log som vanligt är principallogaritmen. Eftersom $h_\pm(-1) = \pm\sqrt{1}\,e^{i\pi/2} = \pm i$ och $\operatorname{Log}(1 \pm i) = (\ln 2)/2 \pm i\pi/4$ ser vi att $f_{m,\pm}(-1) = (\ln 2)/2 + 7\pi i/4$ precis då vi väljer minus och låter $m = 1$; alltså är

$$f(z) = f_{1,-}(z) = \operatorname{Log}\big(1 + h_-(z)\big) + 2\pi i.$$

Insättning ger att $f(-3) = \operatorname{Log}(1 - i\sqrt{3}) + 2\pi i = \ln 2 + 5\pi i/3$, och kedjeregeln ger att

$$f'(z) = \frac{h_-{}'(z)}{1 + h_-(z)} = \frac{1}{2z} \cdot \frac{h_-(z)}{1 + h_-(z)}, \qquad \text{så} \quad f'(-1) = \frac{1}{2(-1)} \cdot \frac{-i}{1 - i} = -\frac{1}{4} + \frac{i}{4}.$$

7. (a) Att $f(\mathbf{C}) = U$ medför att $|f(z)| < 1$ för alla $z \in \mathbf{C}$, och f är därför begränsad. Men f skall dessutom vara hel, så enligt Liouvilles sats är f konstant, vilket strider mot att f antar alla värden i U. Svar: Någon sådan f finns inte.

(b) Låt $s = T(z)$ vara en Möbiusavbildning som avbildar U på halvplanet $\operatorname{Re} s > -1$; t.ex. kan vi välja $T(z) = 2z/(1 - z)$. Låt $g(z) = T(z)^2$. Då är g analytisk i U, och vi skall visa att det till varje $w \in \mathbf{C}$ finns något $z \in U$ sådant att $g(z) = w$.

Tag därför ett godtyckligt $w \in \mathbf{C}$, och låt s vara principalvärdet på $w^{1/2}$. Då är $\operatorname{Re} s \ge 0$, speciellt är $\operatorname{Re} s > -1$, så det finns något $z \in U$ sådant att $T(z) = s$. För detta z är därmed $g(z) = T(z)^2 = s^2 = w$. Svar: T.ex. $g(z) = 4z^2/(1 - z)^2$.

TATA45 Komplex analys 2015-01-17, kommentarer

1. Några tror att $1/(1+s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n$ (FEL) för $|s| < 1$, i stället för det korrekta $1/(1-s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n$.

2. Överraskande många får bara med *en* enkelpol (vissa tappar $z = 0$, ungefär lika många $z = 1$), och det är dessutom oftast oklart varför endast den ena tas med.

   Flera tror att man bara kan ta bort faktorn $\sin \pi z$ vid beräkningen av residyerna i enkelpolerna, och får då att
$$\operatorname*{Res}_{z=n} \frac{1}{(z-1/3)^2 \sin \pi z} = \frac{1}{(z-1/3)^2}\Big|_{z=n} \qquad \text{(FEL);}$$
   enklast här är att använda p/q-metoden, med $p(z) = 1/(z-1/3)^2$ och $q(z) = \sin \pi z$, som i lösningsskissen.

   Oroväckande många har, även om de har insett att residyn i dubbelpolen $z = 1/3$ är derivatan av $1/\sin \pi z$ i punkten $z = 1/3$, deriverat denna funktion fel å det grövsta – och då menar jag inte mindre deriveringsfel som att tappa en faktor π eller att få fel tecken eller så.

3. Några kompletterar de givna punkterna $w(2i) = 0$ och $w(\infty) = 1$ med att låta ytterligare en randpunkt avbildas på en randpunkt, typiskt $w(i) = -5$. Att man med detta val får en avbildning $w(z)$ som avbildar rätt är inte självklart – om man i stället hade valt $w(i) = -2 + 3i$, t.ex., får man *inte* rätt avbildning. Gör man på detta sätt måste man därför motivera varför avbildningen verkligen blir den efterfrågade. (Detta behövs inte om man gör som i lösningsskissen, med spegelpunktsresonemang, eftersom vi har ett resultat i kursen som täcker just detta fall: Följdsats 7.27 [$\hat{\mathbf{C}}$-cirkel på $\hat{\mathbf{C}}$-cirkel, metod 2] i kompendiets upplaga 2014.)

4. Det går naturligtvis bra att rita två separata bilder, en för $w(L_R)$ och en för $w(I_R)$; man får då att $\Delta_{L_R} \arg p(z) \to -\pi/2$ och $\Delta_{I_R} \arg p(z) \to \pi$ när $R \to \infty$.

   Många ritar bilder av *hela* real- och imaginäraxeln, i stället för av de relevanta delarna $x \leq 0$ respektive $y \geq 0$. Gör man så – vilket jag inte rekommenderar – måste det framgå tydligt var punkten $p(0)$ ligger i w-planet (på positiva imaginäraxeln: $p(0) = 8i$) så att det blir begripligt varför man verkligen får de argumenttillskott man får längs negativa realaxeln ($-\pi/2$) respektive positiva imaginäraxeln (π).

   Som vanligt går det bra att endast faktorisera den ena av u och v i respektive delundersökning, som i Exempel 6.5 i kompendiets upplaga 2014.

5. Den sökta integralens värde är uppenbart positivt, så ickereella svar eller reella svar ≤ 0 är orimliga.

   Den främsta svårigheten i uppgiften är hanteringen av enkelpolen $z = 0$, som konturen närmar sig när $\epsilon \to 0^+$; jfr Exempel 5.21 i kompendiets upplaga 2014. Många försöker göra en ML-uppskattning av $\int_{C_\epsilon} f(z)\,dz$, men eftersom den integralen alltså inte går mot noll (utan mot $-\pi$) då $\epsilon \to 0^+$ ger ML-uppskattningen inget användbart.

   Ett par personer låter $\epsilon \to 0^+$ och $R \to \infty$ i var och en av de båda integralerna $\int_\epsilon^R \big((1-e^{2it})/t^2\big)dt$ och $i\int_\epsilon^R \big((1-e^{-2t})/t^2\big)dt$ separat, och får då att
$$\int_0^\infty \frac{1-e^{i2t}}{t^2}\,dt + i\int_0^\infty \frac{1-e^{-2t}}{t^2}\,dt = \pi \qquad \text{(FEL);}$$
   felet består i att dessa båda integraler är divergenta (p.g.a. beteendet nära $t = 0$). Däremot är alltså integralen $\int_0^\infty \big((1-e^{2it})/t^2 + i(1-e^{-2t})/t^2\big)dt$ konvergent, med värde π.

6. Efter att ha gjort ett fungerande grenval till $1 + z^{1/2}$ måste man konstruera en gren till den sammansatta funktionen $\log(1 + z^{1/2})$. Om man gör det genom att välja en gren till $\log w$ genom att klippa upp w-planet längs en stråle från $w = 0$ (vilket är det naturliga) måste man visa att den valda grenen till $1 + z^{1/2}$ inte antar värden på denna stråle när $z \in \Omega$.

7. Ett par personer har missförstått fråga (b) och trott att t.ex. $g(z) = z$ duger, med motiveringen att den ju är analytisk i hela $\mathbf{C}$ (därmed även i U) och har värdemängd $\mathbf{C}$; med denna tolkning vore uppgiften som synes trivial. Vad vi söker är en funktion som är analytisk (åtminstone) i U och som redan i U antar alla värden i $\mathbf{C}$, vilket däremot är ett icke-trivialt problem.

Lars Alexandersson, 27 januari 2015