Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: `TATA45`
Provkod: `TEN1`

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2014-08-28 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan efter skrivtidens slut.

1. Lös ekvationerna (a) $z^3 = 8$ (b) $\cos z = 8$ (c) $\tanh z = 8$
   Svaren skall ges i rektangulär form ($z = x + iy$), och i så enkel form som möjligt.

2. Beräkna med residykalkyl
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta \, d\theta}{5 + 4\cos\theta}.$$

3. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som tar cirkelskivan $|z| < 2$ på halvplanet $\operatorname{Re} w > -1$ på ett sådant sätt att $w(1) = 0$ och $w(-2) = -1$. Bestäm sedan den mängd i z-planet som avbildas på enhetscirkeln $|w| = 1$ i w-planet.

4. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^5 + iz^2 - (1 + i)z + (1 - 6i)$$
   har i (a) enhetsskivan $|z| < 1$ (b) undre halvplanet $\operatorname{Im} z < 0$. (1p+2p)

5. Beräkna alla residyer till funktionen
$$f(z) = \frac{1}{z \tan^2 z}.$$

6. (a) Formulera maximumprincipen i begränsade områden.
   (b) Bestäm största värdet, och var det antas, av $|f(z)|$ på cirkelskivan $|z| \leq 1$ om $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 + 5}$.
   (c) Samma fråga som i (b), men för $f(z) = z^2 + iz + 1$.

7. Låt $c_0, c_1, c_2, \ldots$ vara komplexa tal sådana att
$$\sum_{n=2}^{\infty} n|c_n| < |c_1|.$$
   Sätt
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad |z| < 1.$$
   Visa att serien konvergerar för dessa z, och att f är injektiv.
   (Att f är injektiv betyder som bekant att $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$).

TATA45 Komplex analys 2014-08-28, lösningsskisser

1. (a) Binomisk ekvation. Med $z = re^{i\theta}$ får vi $r^3 e^{3i\theta} = 8e^{i0}$, d.v.s. $r^3 = 8$ och $3\theta = 2n\pi$, alltså $z = 2e^{i2n\pi/3}$, och de tre rötterna $z_1 = 2$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ och $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$.

   (b) Låt $w = e^{iz}$; då är $w \neq 0$, och $\cos z = 8 \Leftrightarrow w + 1/w = 16 \Leftrightarrow w = 8 \pm \sqrt{63}$, båda positiva, så $z = -i \log w = 2n\pi - i \ln(8 \pm \sqrt{63}) = 2n\pi \mp i \ln(8 + \sqrt{63})$, $n \in \mathbf{Z}$.

   (c) Låt $w = e^{2z}$; då är $w \neq 0$, och $\tanh z = 8 \Leftrightarrow (w-1)/(w+1) = 8 \Leftrightarrow w = -9/7$, så $z = (1/2) \log w = (1/2) \ln(9/7) + i\pi/2 + in\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. Med $z = e^{i\theta}$ får vi, där C är den positivt orienterade enhetscirkeln $|z| = 1$,

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta = \int_C \frac{(z + z^{-1})/2}{5 + 4(z + z^{-1})/2} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{4i} \int_C \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 5z/2 + 1)}\, dz.$$

Eftersom $z^2 + 5z/2 + 1 = (z + 1/2)(z + 2)$ ser vi att integranden har singulariteterna $z = 0$ (enkelpol) och $z = -1/2$ (enkelpol) innanför C, så residysatsen och sedvanlig residyberäkning ger

$$I = \frac{2\pi i}{4i} \left(\frac{z^2 + 1}{z^2 + 5z/2 + 1}\Big|_{z=0} + \frac{(z^2 + 1)/z}{\frac{d}{dz}(z^2 + 5z/2 + 1)}\Big|_{z=-1/2} \right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{5}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

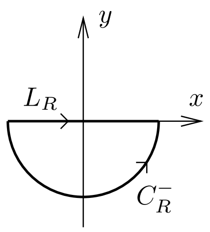
3. Att $w(1) = 0$ ger med nödvändighet att $w(4) = -2$, eftersom 1 och 4 är spegelpunkter m.a.p. cirkeln $|z| = 2$, och 0 och -2 är spegelpunkter m.a.p. linjen $\operatorname{Re} w = -1$. Eftersom dessutom $w(-2) = -1$ är Möbius-avbildningen entydigt bestämd: $w(z) = (4 - 4z)/(3z - 6)$. Denna avbildar cirkeln $|z| = 2$ på linjen $\operatorname{Re} w = -1$, och eftersom $w(1) = 0$ avbildar den dessutom cirkelskivan $|z| < 2$ på halvplanet $\operatorname{Re} w > -1$.

Låt Γ_w vara enhetscirkeln $|w| = 1$ i w-planet och Γ_z den $\hat{\mathbf{C}}$-cirkel i z-planet som avbildas på C_w under $w(z)$ ovan. Invertering ger $z(w) = (6w + 4)/(3w + 4)$, så $w = -4/3 \notin \Gamma_w$ avbildas på $z = \infty$. Alltså är Γ_z en vanlig cirkel $|z - c| = r$, där centrum $c = z(-3/4) = -2/7$ eftersom $-4/3$ och $-3/4$ är spegelpunkter m.a.p. Γ_w och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. Γ_z. Slutligen, $-1 \in \Gamma_w$ ger $z(-1) = -2 \in \Gamma_z$, så $r = |-2 - (-2/7)| = 12/7$ och Γ_z är cirkeln $|z + 2/7| = 12/7$.

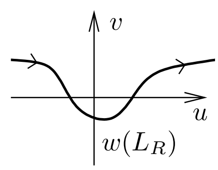
<u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{4 - 4z}{3z - 6}$; cirkeln $\left| z + \dfrac{2}{7} \right| = \dfrac{12}{7}$.

4. (a) Sätt $f(z) = 1 - 6i$ och $g(z) = z^5 + iz^2 - (1 + i)z$. På hela cirkeln $|z| = 1$ gäller olikheterna $|f(z)| = |1 - 6i| = \sqrt{37} > 6$ och $|g(z)| \leq |z|^5 + |z|^2 + \sqrt{2}\,|z| = 2 + \sqrt{2} < 6$, så $|g(z)| < |f(z)|$ på denna cirkel. Enligt Rouchés sats har därför $p(z) = f(z) + g(z)$ lika många nollställen i $|z| < 1$ som $f(z)$, d.v.s. inga alls. <u>Svar</u>: Noll.

   (b) Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^5 + iz^2 - (1 + i)z + (1 - 6i)$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R^- - L_R$ (se figur nere till vänster). På C_R^- får vi tillskottet $\Delta_{C_R^-} \arg p(z) = \Delta_{C_R^-} \arg z^5 + \Delta_{C_R^-} \arg\bigl(1 + i/z^3 - (1 + i)/z^4 + (1 - 6i)/z^5\bigr) \to 5 \cdot \pi + 0 = 5\pi$ då $R \to \infty$. På L_R får vi $p(z) = p(x) = (x^5 - x + 1) + i(x^2 - x - 6) = u + iv$, där v lätt kan faktoriseras: $v = (x + 2)(x - 3)$. Vi får därmed nedanstående tabell, samt kurvskiss $w = p(z)$ då z genomlöper L_R:



x	$-\infty$	$<$	-2	$<$	3	$<$	$+\infty$
u	$-$	?	$-$	?	$+$	?	$+$
v	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$



Dessutom får vi av gradskäl att $v/u \to 0$ då $x \to \pm\infty$ (u drar mer än v), och detta tillsammans med tabellen ovan ger figuren ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{L_R} \arg p(z) \to \pi$ då $R \to \infty$. Antalet nollställen i högra halvplanet blir därför $(1/2\pi) \lim_{R\to\infty} (\Delta_{C_R^-} \arg p(z) - \Delta_{L_R} \arg p(z)) = (5\pi - \pi)/2\pi = 2$, eftersom poler saknas. <u>Svar</u>: Två.

5. Vi noterar först att $\tan z = \sin z/\cos z$ är odefinierat då $\cos z = 0$, d.v.s. då $z = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Vidare är nämnaren $z\tan^2 z = 0$ då $z = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Vår funktion $f(z)$ är alltså analytisk överallt utom i punkterna $z = n\pi/2$, $n \in \mathbf{Z}$.

I en punkterad omgivning till $z = \pi/2 + n\pi$ är $f(z) = (\cos^2 z)/(z\sin^2 z)$, och högerledet här är analytiskt i dessa punkter. Således har vi hävbara singulariteter här, och residyn är därför 0.

Residyn i punkten $n\pi$ är koefficienten för $(z - n\pi)^{-1}$ i Laurentserien för f i en punkterad skiva med centrum i $n\pi$, så om vi gör variabelbytet $w = z - n\pi$ blir residyn för f i punkten $n\pi$ samma som residyn i 0 för funktionen

$$w \mapsto \frac{\cos^2(w + n\pi)}{(w + n\pi)\sin^2(w + n\pi)} = \frac{\cos^2 w}{(w + n\pi)\sin^2 w}.$$

Här är

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2 w}{\sin^2 w} &= \frac{\left(1 - w^2/2! + \mathcal{O}(w^4)\right)^2}{\left(w - w^3/3! + \mathcal{O}(w^5)\right)^2} = \frac{1 - w^2 + \mathcal{O}(w^4)}{w^2\left(1 - w^2/3 + \mathcal{O}(w^4)\right)}\\ &\overset{*}{=} \frac{\left(1 - w^2 + \mathcal{O}(w^4)\right)\left(1 + w^2/3 + \mathcal{O}(w^4)\right)}{w^2} = \frac{1 - 2w^2/3 + \mathcal{O}(w^4)}{w^2},\end{aligned}$$

där vi i steg $*$ använder att $(1 + s)^{-1} = 1 - s + \mathcal{O}(s^2)$ med $s = -w^2/3 + \mathcal{O}(w^4)$. Vidare,

$$\frac{1}{w + n\pi} = \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{1}{1 + w/(n\pi)} = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{w}{n\pi} + \mathcal{O}(w^2)\right), \qquad n \neq 0,$$

så

$$\operatorname*{Res}_{z=n\pi} f(z) = \operatorname*{Res}_{w=0} \frac{\cos^2 w}{(w + n\pi)\sin^2 w} = \begin{cases} \operatorname*{Res}_{w=0} \dfrac{1}{w} \cdot \dfrac{1 - 2w^2/3 + \mathcal{O}(w^4)}{w^2} = -\dfrac{2}{3}, & n = 0,\\ \operatorname*{Res}_{w=0} \dfrac{1}{n\pi}\left(1 - \dfrac{w}{n\pi} + \mathcal{O}(w^2)\right)\dfrac{1 + \mathcal{O}(w^2)}{w^2} = -\dfrac{1}{(n\pi)^2}, & n \neq 0,\end{cases}$$

som ju är koefficienten för w^{-1} i de respektive fallen.

<u>Svar</u>: $\operatorname*{Res}_{z=\pi/2+n\pi} f(z) = 0$, $n \in \mathbf{Z}$; $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -2/3$; $\operatorname*{Res}_{z=n\pi} f(z) = -1/(n\pi)^2$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

6. (a) Om Ω är ett begränsat område, och f är analytisk i Ω och kontinuerlig på $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, så antar $|f|$ sitt maximum någonstans på randen $\partial\Omega$. (Nedan använder vi också följande: Om f inte är konstant i Ω kan inte $|f|$ anta sitt maximum i någon punkt i Ω.)

   (b) Maximum antas på randen $|z| = 1$, och där är täljarens belopp $|e^{iz}| = e^{-y} \leq e^1 = e$, med likhet precis då $y = -1$ och $x = 0$, d.v.s. då $z = -i$. Nämnarens belopp $|z^2 + 5| \geq 5 - |z|^2 = 4$, med likhet precis då z^2 och 5 är motsatt riktade, d.v.s. då $z^2 = -1$, alltså $z = \pm i$. Vi ser därför att $|f(z)| \leq e/4$, med likhet precis då $z = -i$. <u>Svar</u>: $|f|_{\max} = |f(-i)| = e/4$.

   (c) Maximum antas på randen $|z| = 1$, och där är, med $z = e^{i\theta}$, $|z^2 + iz + 1| = |z(z + i + 1/z)| = |z + i + 1/z| = |e^{i\theta} + i + e^{-i\theta}| = |2\cos\theta + i| = \sqrt{4\cos^2\theta + 1}$, som antar maximum, $\sqrt{5}$, precis då $\cos\theta = \pm 1$, d.v.s. då $z = \pm 1$. <u>Svar</u>: $|f|_{\max} = |f(\pm 1)| = \sqrt{5}$.

7. När $|z| < 1$ får vi $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| = |c_0| + |c_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \leq |c_0| + |c_1| + \sum_{n=2}^{\infty} n|c_n| < |c_0| + 2|c_1|$, så potenssserien är absolutkonvergent, och därmed konvergent, för dessa z.

Antag i fortsättningen att $z_1 \neq z_2$, och att $|z_1| < 1$ och $|z_2| < 1$; vi skall visa att $f(z_1) \neq f(z_2)$. Vi kan skriva $f(z_1) - f(z_2) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z_1^n - z_2^n)$, och eftersom, med primitiv funktion och ML-uppskattning,

$$z_1^n - z_2^n = \int_{[z_2,z_1]} ns^{n-1}\,ds, \quad \text{och därmed} \quad |z_1^n - z_2^n| \leq n|z_1 - z_2|, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

där $[z_2, z_1]$ står för sträckan från z_2 till z_1, får vi

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} c_n(z_1^n - z_2^n)\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |c_n||z_1^n - z_2^n| \leq |z_1 - z_2| \sum_{n=2}^{\infty} n|c_n| < |c_1||z_1 - z_2|.$$

Detta ger $|f(z_1) - f(z_2)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z_1^n - z_2^n)\right| \geq |c_1||z_1 - z_2| - \left|\sum_{n=2}^{\infty} c_n(z_1^n - z_2^n)\right| > 0$, med omvända triangelolikheten, varför $f(z_1) \neq f(z_2)$, vilket skulle bevisas.

TATA45 Komplex analys 2014-08-28, kommentarer

1. Den sista omskrivningen i (b) bygger på att $8-\sqrt{63}=1/(8+\sqrt{63})$, men den krävs inte för poäng. Förvånansvärt många tror att $|8+\sqrt{63}|=\sqrt{127}$ (FEL), förmodligen en sammanblandning med det korrekta $|8+i\sqrt{63}|=\sqrt{127}$.

   Både (a) och (b) går faktiskt också att lösa med direkt insättning $z=x+iy$ och identifiering av real- och imaginärdelarna i ekvationerna, även om jag inte rekommenderar det. I (a) får man då $x^3-3xy^2=8$ och $3x^2y-y^3=0$, i (b) $\cos x\cosh y=8$ och $-\sin x\sinh y=0$. Ekvationerna för imaginärdelarna ger i (a) $y=0$ eller $y^2=3x^2$, i (b) $x=n\pi$ eller $y=0$, och detta sätter man sedan in i ekvationerna för realdelarna och löser dessa. Notera hur mycket svårare det skulle bli med den här metoden om imaginärdelarna *inte* vore noll.

2. Några svarar med ett ickereellt värde, vilket är orimligt eftersom integralen är rent reell.

   Några skriver om integralen till
   $$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta=\int_C\frac{(z+z^{-1})/2}{5+4(z+z^{-1})/2}\,\frac{dz}{iz}=\frac{1}{4i}\int_C\frac{z+z^{-1}}{z^2+5z/2+1}\,dz,$$
   vilket är korrekt, men tror sedan att integrandens singulariteter finns endast där nämnarpolynomet $z^2+5z/2+1=0$ (FEL); även $z=0$ är ju en singularitet, vilket man ser i täljaren $z+z^{-1}$.

   Några tror att $2z^2+5z+2=(z+1/2)(z+2)$ (FEL) i stället för $2z^2+5z+2=2(z+1/2)(z+2)$.

3. Några kompletterar de givna punkterna $w(1)=0$ och $w(-2)=-1$ med att låta ytterligare en randpunkt avbildas på en randpunkt, typiskt $w(2)=\infty$. Att man med detta val får en avbildning $w(z)$ som avbildar rätt är inte självklart – om man i stället hade valt $w(2i)=\infty$, t.ex., får man *inte* rätt avbildning. Gör man på detta sätt måste man därför motivera varför avbildningen verkligen blir den efterfrågade. (Detta behövs inte om man gör som i lösningsskissen, med spegelpunktsresonemang, eftersom vi har en sats i kursen som täcker just detta fall.)

   Ett alternativt sätt att bestämma den $\hat{\mathbf{C}}$-cirkel Γ_z som avbildas på $\Gamma_w:|w|=1$ är följande, och bygger på konformitet: Γ_w tangerar linjen $\operatorname{Re}w=-1$ i punkten $w=-1$, och därför tangerar Γ_z cirkeln $|z|=2$ i punkten $z=z(-1)=-2$. Eftersom dessutom $w=1\in\Gamma_w$ och därmed $z(1)=10/7\in\Gamma_z$ får vi att Γ_z är cirkeln $|z+2/7|=12/7$.

4. (a) I denna Rouchéuppgift förekommer det ett antal ”klassiska” fel i lösningarna. Se kommentarerna till uppgift 2b på tentamen 2011-12-20 för en allmän diskussion.

   Alternativt kan denna uppgift lösas direkt med triangelolikheten, helt utan Rouchés sats: Om $|z|<1$ är $|z^5+iz^2-(1+i)z|\le|z|^5+|z|^2+\sqrt{2}\,|z|\le 2+\sqrt{2}$, och eftersom $|1-6i|=\sqrt{37}>2+\sqrt{2}$ är $|p(z)|=|z^5+iz^2-(1+i)z+(1-6i)|\ge|1-6i|-|z^5+iz^2-(1+i)z|\ge\sqrt{37}-(2+\sqrt{2})>0$, och därmed är $p(z)\ne 0$.

   (b) En svårighet här är att polynomet $u(x)=x^5-x+1$ inte har någon enkel faktorisering. Nu gör det inget eftersom $v(x)=x^2-x-6$ lätt kan faktoriseras, och det räcker ju att den ena av u och v kan faktoriseras, se Anmärkning A.5 i kompendiet (upplaga 2013, 2012 och 2011).

5. Ingen har tänkt på att $\tan z$ är odefinierad i punkterna $z=\pi/2+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$, och att dessa därför också måste undersökas.

   Några beräknar residyerna i dubbelpolerna $z=n\pi$, $n\ne 0$, fel, typiskt på följande vis:
   $$\operatorname*{Res}_{z=n\pi}\frac{\cos^2 z}{z\sin^2 z}=\frac{d}{dz}\left(\frac{\cos^2 z}{z}\right)\Big|_{z=n\pi}\qquad\text{(FEL)}$$
   Man kan ju inte bara plocka bort den ”farliga” faktorn, här $\sin^2 z$. Här råkar det ge rätt värde på residyn, men det är en ren tillfällighet; om t.ex. $f(z)=1/(z\tan^2 2z)$ skulle motsvarande beräkning inte bara vara fel utan också ge fel värde på residyn.

6. Även (b) kan lösas med parametrisering $z=e^{i\theta}$ och envariabeloptimering: Med $t=\sin\theta$ får man i så fall $|f(e^{i\theta})|=e^{-t}/\sqrt{36-20t^2}$, $-1\le t\le 1$, en funktion som är lätt att undersöka.

7. Inget att kommentera.

Lars Alexandersson, 5 september 2014