TATA44 Lösningar 8/1/2019.

1.) I cylinderkoordinater är konen $z = \rho$ och sfären är $\rho^2 + z^2 = 4$. Dessa två ytor skär varandra då $\rho^2 = 2$, det vill säga då $\rho = \sqrt{2}$. Parametrisera S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$ med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : \rho \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har då $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} + \hat{z}) \times (\rho\,\hat{\phi}) = -\rho\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$ vilket ger $\left|\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi\right| = \sqrt{2}\rho$. Den sökta integralen är då

$$
\begin{aligned}
\iint_S \sqrt{2+\rho^2}\,dS &= \iint_D \sqrt{2+\rho^2}\left|\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi\right|\,d\rho\,d\phi \\
&= \sqrt{2}\iint_D \rho\sqrt{2+\rho^2}\,d\rho\,d\phi \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi} \rho\sqrt{2+\rho^2}\,d\phi\right)d\rho \\
&= 2\sqrt{2}\pi\int_0^{\sqrt{2}} \rho\sqrt{2+\rho^2}\,d\rho \\
&= [u = 2+\rho^2] \\
&= \sqrt{2}\pi\int_2^4 \sqrt{u}\,du \\
&= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left[u^{3/2}\right]_2^4 \\
&= \frac{8\pi}{3}\left[2\sqrt{2}-1\right].
\end{aligned}
$$

2.) En standardräkning ger $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3(x^2+y^2)+6z$ eller $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3\rho^2+6z$ i cylinderkoordinater. I cylinderkoordinater är S den del av $z = 2-\rho^2$ som är innanför $z = \rho$. Dessa två ytor skär varandra då $\rho^2+\rho-2 = 0$ eller $(\rho+2)(\rho-1) = 0$ som ger $\rho = 1$ ty $\rho \geq 0$. Ytan S ges nu av ekvationen $z = 2-\rho^2$ med $\rho \leq 1$. Parametrisera S med ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + (2-\rho^2)\,\hat{z}$ med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Låt S_1 vara ytan $S_1 : z = 1,\ \rho \leq 1$ och låt V beteckna den kropp som omslutes av $S + S_1$. V ges av olikheterna $1 \leq z \leq 2-\rho^2,\ \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Då har vi enligt Gauss' Sats att

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV$$

Observera att i Gauss' Sats pekar **alla normaler ut** ur kroppen och i synnerhet blir $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} > 0$ på S, vilket stämmer överens med den angivna flödesriktningen. Normalen till S_1 är $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{z}$ (och inget annat) eftersom den pekar ut ur kroppen V. Vi får då

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iiint_V (3\rho^2+6z)\,dV - \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS_1.$$

Vi har

$$\iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 = -3\iint_{S_1} dS_1 = -3\pi$$

ty S_1 är en cirkelskiva med radie $\rho = 1$. Vidare har vi

$$
\begin{aligned}
\iiint_V (3\rho^2 + 6z)\, dV &= \iiint_V (3\rho^2 + 6z)\, \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \\
&= 3\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^{2-\rho^2} \rho(\rho^2 + 2z)\, dz \right) d\phi \right) d\rho \\
&= 3\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho(\rho^2(1-\rho^2) + (2-\rho^2)^2 - 1)\, d\phi \right) d\rho \\
&= 6\pi \int_0^1 3\rho(1-\rho^2)\, d\rho \\
&= \frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Det sökta flödet är då

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS &= \iiint_V (3\rho^2 + 6z)\, dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 \\
&= 3\pi + \frac{9\pi}{2} \\
&= \frac{15\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

3.) En standardräkning ger

$$
\nabla \times \mathbf{A} = 3(x^2 + y^2)\, \hat{z}.
$$

Ytorna skär varandra då $1-x-y = 3/2-x^2-y^2$ vilket ger $x^2+y^2-x-y = 1/2$. Kvadratkomplettering ger $(x-1/2)^2+(y-1/2)^2 = 1$. Låt S vara den del av planet $x+y+z = 1$ med $(x, y) \in D$ där $D : (x-1/2)^2+(y-1/2)^2 \leq 1$. Parametrisera S med ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = x\,\hat{x}+y\,\hat{y}+(1-x-y)\,\hat{z}$ där $(x, y) \in D$. Vi har $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$ (efter en standardräkning). Stokes Sats ger nu

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot\, d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS \\
&= \iint_D \nabla \times \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y)\, dxdy \\
&= \iint_D 3(x^2 + y^2)\, dxdy \\
&[x = 1/2 + \rho\cos\phi,\ y = 1/2 + \rho\sin\phi,\ \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= 3\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left[\rho^2 + \rho(\cos\phi + \sin\phi) + \frac{1}{2} \right] d\phi \right) \rho\, d\rho \\
&= 3\pi \int_0^1 \rho(\rho^2 + 1)\, d\rho \\
&= 3\pi.
\end{aligned}
$$

I Stokes' Sats måste Γ genomlöpas moturs sett från $(0, 0, 17)$ medan här ska kurvan genomlöpas medurs. Således har vi

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot\, d\mathbf{r} = -3\pi.$$

4.) I sfäriska koordinater har vi, för en funktion Φ,

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\,\hat{\phi}.$$

Vektorfältet $\mathbf{A}$ har en potential då $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion Φ. Detta ger nu systemet

$$\Phi'_r = 2r\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\phi, \quad \Phi'_\theta = r^2\sin^2\phi[\cos^3\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta], \quad \Phi'_\phi = 3r^2\cos^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi.$$

Den första ekvationen integreras till

$$\Phi = r^2\cos^2\sin\theta\sin^2\phi + g(\theta,\phi).$$

Insättning av detta i den tredje ekvationen ger

$$g'_\phi = 0$$

. En insättning i den andra ekvationen ger

$$g'_\theta = 0$$

. Således ges varje potential Φ till $\mathbf{A}$ av

$$\Phi = r^2\cos^2\sin\theta\sin^2\phi + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) Vi har $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ med

$$\mathbf{A}_1 = -y\,\hat{x} + x\hat{y}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{y}{x^2+y^2}\,\hat{x} - \frac{x}{x^2+y^2}\,\hat{y}.$$

Vi har enligt Greens formel

$$\int_\Gamma \mathbf{A}_1\cdot d\mathbf{r} = 2\iint_D dxdy$$

där $D : 9x^2 + 4y^2 \leq 36$. Arean av ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ (med $a, b > 0$) är πab. Då har vi

$$\iint_D dxdy = 6\pi$$

och

$$\int_\Gamma \mathbf{A}_1\cdot d\mathbf{r} = 12\pi.$$

Vektorfältet $\mathbf{A}_2$ är singulärt i origo. Sätt

$$P = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

och låt Γ_1 vara kurvan $x^2 + y^2 = 1$ och låt S vara området mellan Γ och Γ_1. Enligt Greens formel har vi

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (Q'_x - P'_y) dxdy = 0.$$

Här genomlöps $Gamma_1$ medurs då $Gamma$ genomlöps moturs (ty $Gamma_1$ ligger innanför $Gamma$). Kurvan $Gamma_1$ parametriseras då av ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho}$ med $\phi : 2\pi \to 0$ i plana polära koordinater och vektorfältet $\mathbf{A}_2$ ges av $\mathbf{A}_2 = -1/\rho\hat{\phi}$ i plana polära koordinater. Således har vi

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} &= -\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} \\
&= -\int_{2\pi}^{0} \mathbf{A}_2\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_{2\pi}^{0} d\phi \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

Av detta får vi

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_\Gamma \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = 10\pi.$$

6.) Lösning 1: Lägg till ytan $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0$. Ytan $S + S_1$ är sluten (rita figur!) och omsluter en kropp V. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv = 0$$

eftersom $\mathbf{A}$ är av klass C^1 inom V och $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Observera att alla normaler pekar ut ur V. Då har vi

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = -\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, dS_1$$

där $\hat{\mathbf{n}}$ pekar in mot z-axeln och således är $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{z} < 0$. För att beräkna

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, dS_1$$

inför vi sfäriska koordinater. S_1 parametriseras av ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta, \phi) = 2\hat{\mathbf{r}}$ med $(\theta, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vidare är $\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = (2\hat{\theta}) \times (2\sin\theta\, \hat{\phi}) = 4\sin\theta\hat{\mathbf{r}}$. Vektorfältet $\mathbf{A}$ är då

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

och på S_1 är

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi) = \frac{1}{4}\hat{\mathbf{r}}.$$

Vi har nu

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS_1 &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi) \, d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \hat{\mathbf{r}} \cdot (4 \sin\theta \hat{\mathbf{r}}) \, d\phi \right) d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Eftersom $\hat{\mathbf{n}}$ pekar in mot origo och $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{z} < 0$ då är det sökta flödet

$$\begin{aligned}
\Phi = -\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS_1 \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Lösning 2: Ytan S är $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2},\ z \geq 0$. Definiera ytan $S_\epsilon : z = 2 - \sqrt{x^2+y^2},\ z \geq \epsilon$ med $\epsilon > 0$. Då definierar vi

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \lim_{\epsilon \to 0} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_\epsilon.$$

$\mathbf{A}$ har en singularitet i $(0,0,0)$ vilket medför att man inte kan tillämpa Gauss' Sats på området mellan S och xy-planet. Däremot kan man tillämpa Gauss' Sats på området mellan S_ϵ och planet $z = \epsilon$ för $\epsilon > 0$. Till S_ϵ lägger vi till $L_\epsilon : \sqrt{x^2+y^2} \leq 2 - \epsilon,\ z = \epsilon$ med $\epsilon > 0$. Definiera V_ϵ som omslutes av $S_\epsilon + L_\epsilon$. En standard räkning visar att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ i hela V_ϵ. Enligt Gauss' Sats har vi då

$$\iint_{S_\epsilon + L_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iiint_{V_\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV_\epsilon = 0$$

av vilket vi erhåller

$$\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_\epsilon = -\iint_{L_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_L \, dL_\epsilon.$$

På L_ϵ är normalen $\hat{\mathbf{n}}_L = -\hat{z}$ eftersom normalerna till alla ytorna ska peka ut ur V_ϵ. Detta ger att

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_L = -\mathbf{A} \cdot \hat{z} = -\frac{\epsilon}{(x^2+y^2+\epsilon^2)^{3/2}}$$

eftersom $z = \epsilon$ på L_ϵ och då har vi att

$$\begin{aligned}
\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS_\epsilon &= -\iint_{L_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_L\, dL_\epsilon \\
&= \iint_{x^2+y^2\le(2-\epsilon)^2} \frac{\epsilon}{(x^2+y^2+\epsilon^2)^{3/2}}\, dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi;\ 0\le\phi\le 2\pi,\ \rho\le 2-\epsilon] \\
&= \int_0^{2-\epsilon}\left(\int_0^{2\pi} \frac{\epsilon}{(\rho^2+\epsilon^2)^{3/2}}\, d\phi\right)\rho\, d\rho \\
&= 2\pi\epsilon \int_0^{2-\epsilon} \frac{\rho}{(\rho^2+\epsilon^2)^{3/2}}\, d\rho \\
&= 2\pi\epsilon \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\epsilon^2)}}\right]_0^{2-\epsilon} \\
&= 2\pi\epsilon \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\sqrt{4+2\epsilon^2-4\epsilon}}\right] \\
&= 2\pi - \frac{2\pi\epsilon}{\sqrt{4+2\epsilon^2-4\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Nu erhåller vi att

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS &= \lim_{\epsilon\to 0} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS_\epsilon \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left[2\pi - \frac{2\pi\epsilon}{\sqrt{4+2\epsilon^2-4\epsilon}}\right] \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Lösning 3: Till ytan S lägger man ytorna $L: 1\le x^2+y^2\le 4,\ z=0$ och $C: x^2+y^2+z^2 = 1,\ z\ge 0$. Inom det område V som $S+L+C$ omsluter råder $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ och $\mathbf{A}$ är av klass C^1. Då har vi enligt Gauss' Sats att

$$\iint_{S+L+C} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dV = 0$$

av vilket det följer att

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = -\iint_L \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_L\, dL - \iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\, dC.$$

På L är $\hat{\mathbf{n}}_L = -\hat{z}$ vilket ger $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_L = -\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0$ eftersom $z=0$ på L. Således är

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = -\iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\, dC.$$

Observera att alla normaler pekar ut ur V. För att beräkna integralen över C är det lämpligt att införa sferiska koordinater. Vi parametriserar C med ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta,\phi) = \hat{\mathbf{r}}$ med $(\theta,\phi)\in D$ där $D: 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le 2\pi$. Vidare har vi $\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi = \sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}$. I sfäriska koordinater har vi att $\mathbf{A} = \dfrac{1}{r^2} math\hat{bf}r$. Vi har då (eftersom $\hat{\mathbf{n}}_C$ pekar ut ur V och in mot origo)

$$
\begin{aligned}
\iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C \, dC &= -\iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot \left(\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi\right) \, d\theta d\phi \\
&= -\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\phi \right) \, d\theta \\
&= -2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \\
&= -2\pi.
\end{aligned}
$$

Då är det sökta flödet

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \\
&= -\iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C \, dC \\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$