TATA44 Lösningar 22/10/2018.

1.) Ytorna $z = 3 - (x^2 + y^2)$och $2x + 2y + z = 1$ skär varandra då $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$, d v s då $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$. Sätt $D : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$. Parametrisera S med ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + (3 - x^2 - y^2)\,\hat{z}$ med $(x, y) \in D$. En standardräkning ger

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = 2x\,\hat{x} + 2y\,\hat{y} + \hat{z}$$

av vilket det följer att

$$\left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right| = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}.$$

Vi har då

$$\begin{aligned}
\iint_S \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dS &= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right|\, dxdy \\
&= \iint_D [1 + 4(x^2 + y^2)]\, dxdy \\
&= [x = 1 + \rho\cos\phi,\ y = 1 + \rho\sin\phi,\ \rho \leq 2,\ \ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} [9 + 4\rho^2 + 8\rho\cos\phi + 8\rho\sin\phi]\, d\phi\right) \rho\, d\rho \\
&= 2\pi \int_0^2 [9\rho + 4\rho^3]\, d\rho \\
&= 2\pi \left[\frac{9\rho^2}{2} + \rho^4\right]_0^2 \\
&= 68\pi.
\end{aligned}$$

2.) Lösning 1: En standardräkning ger $\nabla \cdot \mathbf{A} = x^2 + y^2 - z$. Till ytan $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ lägger vi ytan $S_1 . x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1$. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV$$

kroppen V definieras av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 1,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$. Observera att i Gauss' Sats pekar **alla normaler ut** ur kroppen och i synnerhet blir $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{z} < 0$ på S. Normalen till S_1 är $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{z}$ eftersom den pekar ut ur kroppen V. Vi får då

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V (x^2 + y^2 - z)\, dxdydz - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1.$$

Vi har

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 &= \iint_{x^2+y^2\le 1} x^2\,dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1] \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3\cos^2\phi\,d\phi \right) d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 \frac{1+\cos 2\phi}{2}\,d\phi \right) d\rho \\
&= \pi \int_0^1 \rho^3\,d\rho \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Vidare har vi

$$
\begin{aligned}
\iiint_V (x^2+y^2-z)\,dxdydz &= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ z=z; 0\le\rho\le 1,\ 0\le\phi\le 2\pi,\ \rho\le z\le 1] \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_\rho^1 [\rho^2 - z]\,dz \right) \rho\,d\phi \right) d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{3\rho^3}{2} - \frac{\rho}{2} - \rho^4 \right] d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{3\rho^3}{2} - \frac{\rho}{2} - \rho^4 \right] d\rho \\
&= -\frac{3\pi}{20}
\end{aligned}
$$

och vi erhåller

$$
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_V (x^2+y^2-z)\,dxdydz - \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS_1 = -\frac{2\pi}{5}.
$$

I denna kalkyl pekade alla normaler ut ur kroåppen V vilket betyder att $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} < 0$ på S. Vi ska ha $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} > 0$ och då är det sökta flödet

$$
\Phi = -\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \frac{2\pi}{5}.
$$

Lösning 2: Parametrisera ytan S med ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\cos\phi\,\hat{x} + \rho\sin\phi\,\hat{y} + \rho\,\hat{z}$ med $(\rho,\phi)\in D$ där $D: 0\le\rho\le 1,\ 0\le\phi\le 2\pi$. Vi har

$$
\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = [\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} + \hat{z}] \times [-\rho\sin\phi\,\hat{x} + \rho\cos\phi\,\hat{y}] = -\rho\cos\phi\,\hat{x} - \rho\sin\phi\,\hat{y} + \rho\,\hat{z}.
$$

Denna vektor är vinkelrät mot ytan och har postiv z-komponent. Vi har även

$$
\mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi)) = \rho^3\cos\phi\sin^2\phi\,\hat{x} - \rho^2\sin\phi\,\hat{y} + \rho^3\cos^2\phi\,\hat{z}.
$$

Det sökta flödet är då

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS \\
&= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi)\,d\rho d\phi \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left[\rho^3\sin^2\phi+\rho^4\left(\cos^2\phi-\frac{\sin^2 2\phi}{4}\right)\right]\,d\phi\right)\,d\rho \\
&= \left[\cos^2 A=\frac{1+\cos 2A}{2},\ \sin^2 A=\frac{1-\cos 2A}{2}\right] \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left[\frac{3\rho^4}{8}+\frac{\rho^3}{2}+\frac{\cos 2\phi}{2}(\rho^4-\rho^3)+\frac{\rho^4\cos 4\phi}{8}\right]\,d\phi\right)\,d\rho \\
&= 2\pi\int_0^1\left[\frac{3\rho^4}{8}+\frac{\rho^3}{2}\right]\,d\rho \\
&= \frac{2\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

Łösning 3: En tredje lösningsgång är att behålla kartesiska koordinater så långt det går. Vi parametriserar då ytan $z=\sqrt{x^2+y^2}$ genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(x,y)=x\,\hat{x}+y\,\hat{y}+\sqrt{x^2+y^2}\,\hat{z}$$

med $(x,y)\in D$ där $D.x^2+y^1\leq 1$. Vi får

$$\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y=\left(\hat{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\hat{z}\right)\times\left(\hat{y}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\hat{z}\right)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\hat{x}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\hat{y}+\hat{z}$$

som är ortogonal mot ytan $z=\sqrt{x^2+y^2}$ och har positiv z-komponent. Vidare har vi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y))=x^2\,\hat{x}-y\sqrt{x^2+y^2}\,\hat{y}+x^2\sqrt{x^2+y^2}\,\hat{z}.$$

Det sökta flödet är nu

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y))\cdot\left(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y\right)\,dxdy \\
&= \iint_D \left[x^2\,\hat{x} - y\sqrt{x^2+y^2}\,\hat{y} + x^2\sqrt{x^2+y^2}\,\hat{z}\right]\cdot\left[-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\hat{x} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\hat{y} + \hat{z}\right]\,dxdy \\
&= \iint_D \left[x^2\sqrt{x^2+y^2} + y^2 - \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\,dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left[\rho^3\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi - \rho^3\cos^2\phi\sin^2\phi\right]\rho\,d\phi\right)\,d\rho \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left[\frac{3\rho^4}{8} + \frac{\rho^3}{2} + \frac{\rho^4\cos 2\phi}{2} + \frac{\rho^3\cos 4\phi}{8} - \frac{\rho^2\cos 2\phi}{2}\right]\,d\phi\right)\,d\rho \\
&= 2\pi\int_0^1\left[\frac{3\rho^4}{8} + \frac{\rho^3}{2}\right]\,d\rho \\
&= \frac{2\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

3.) Standardräkningar ger

$$\nabla\times\mathbf{A} = -y\,\hat{x} - z\,\hat{y} - x\,\hat{z}.$$

Låt S vara den del av planet $2x+2y+z=2$ som är innanför paraboloiden $z=x^2+y^2$. Planet skär paraboloiden då $x^2+y^2+2x+2y=2$ det vill säga, då $(x+1)^2+(y+1)=4$. Sätt $D:(x+1)^2+(y+1)\le 4$. Parametriseraytan $z=x^2+y^2$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{x}+y\,\hat{y}+(2-2x-2y)\,\hat{z}$. Vi får $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y = 2\,\hat{x}+2\,\hat{y}+\hat{z}$. Stokes Sats ger nu (då Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0,0,17)$)

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS \\
&= \iint_D \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y))\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)\,dxdy \\
&= -\iint_D [y\,\hat{x} + (2-2x-2y)\,\hat{y} + x\,\hat{z}]\cdot[2\,\hat{x}+2\,\hat{y}+\hat{z}]\,dxdy \\
&= -\iint_D [4-3x-2y]\,dxdy \\
&= [x=-1+\rho\cos\phi,\ y=-1+\rho\sin\phi,\ 0\le\rho\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= -\iint_0^2\left(\int_0^{2\pi}[9\rho - \rho^2(3\cos\phi + 2\sin\phi)\,d\phi\right)\,d\rho \\
&= -18\pi\int_0^2 \rho\,d\rho \\
&= -36\pi.
\end{aligned}
$$

I tillämpningen av Stokes' Sats, ska kurvan vara positivt orienterad, vilket i det här fallet medför att Γ genomlöps moturs sett från $(0,0,17)$. Men Γ ska genomlöpas medurs. Således erhåller vi att Av detta får vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 36\pi.$$

4.) Om $\mathbf{A}$ är ett potentialfält då är $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Av detta får vi

$$\nabla \times \mathbf{A} = (f'_z - 2z)\,\hat{y} + (2 - f'_y)\,\hat{z} = 0$$

vilket ger $f'_y = 2,\ f'_z = 2z$. Detta system ger $f(y, z) = z^2 + 2y + C$. Kravet $f(0, 0,) = 0$ ger $C = 0$ och då är $f(y, z) = z^2 + 2y$. Om $\mathbf{A} = \nabla\phi$ då har vi (med $f(y, z) = z^2 + 2y$)

$$\Phi'_x = 2xy + z^2 + 2y, \quad \Phi'_y = x^2 + 2yz + 2x + z, \quad \Phi'_z = y^2 + 2xz + y.$$

En standardräkning ger

$$\Phi = x^2y + xz^2 + 2xy + y^2z + yz + C.$$

Kurvan genomlöps medurs sett från $(-1, 1, 0)$ och då börjar den i den positiva kvadranten av xy-planet och slutar på den positiva z-axeln. Kurvans slutpunkt, sett från $(-1, 1, 0)$, är på den positiva z-axeln med med $x = y = 0$ och $z = \sqrt{2}$. Startpunkten är då $(1, 1, 0)$: den ligger i den positiva kvadranten av xy-planet med $z = 0$ och ges genom $x = y,\ x^2 + y^2 = 2,\ x \geq 0$ som ger punkten $(1, 1, 0)$.

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(0, 0, \sqrt{2}) - \Phi(1, 1, 0) = -3.$$

5.) En standard räkning ger $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $x^2 + y^2 \neq 0$. Låt Γ_1 vara kurvan $\Gamma_1 : x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ och S vara en C^1-yta vars rand består av $\Gamma + \Gamma_1$ (och som inte skärs av z-axeln). Enligt Stokes' Sats har vi

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{n}\, dS = 0$$

och vi får då att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där både Γ och Γ_1 genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$. Parametrisera Γ_1 med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \cos\phi\,\hat{x} + \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{y}$ med $\phi : 0 \to 2\pi$ (som motsvarar orienteringen moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$). Vi har då

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}\Big) \cdot \left(-\sin\phi\,\hat{x} + \frac{\cos\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{y}\right) d\phi \\
&= \sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

6.) Lösning 1: I cylinderkoordinater är vektorfältet

$$\mathbf{A} = \frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{\rho} + \frac{z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{z}.$$

Ytan är (i cylinderkoordinater) $S : \rho^2 - z^2 = 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ -1 \le z \le 1$. Vi har då $\rho = \sqrt{2+z^2}$ på ytan. Parametrisera ytan genom ortsvektorn (observera att ortsvektorn i cylinderkoordinater är $\mathbf{r} = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$)

$$\mathbf{r}(\phi, z) = \sqrt{2+z^2}\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$$

med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \le \phi \le 2\pi,\ -1 \le z \le 1$. Vi har då

$$\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = \sqrt{2+z^2}\,\hat{\phi} \times \left(\frac{z}{\sqrt{2+z^2}}\,\hat{\rho} + \hat{z}\right) = \sqrt{2+z^2}\,\hat{\rho} - z\,\hat{z}.$$

Observera att denna vektor har positiv $\hat{\rho}$-komponent och därmed pekar bort från z-axeln.

På S har vi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi, z)) = \frac{\sqrt{2+z^2}}{(2+2z^2)^{3/2}}\,\hat{\rho} + \frac{z}{(2+2z^2)^{3/2}}\,\hat{z}.$$

Det sökta flödet är då

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z)\,d\phi dz \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2+z^2}}{(2+2z^2)^{3/2}}\,\hat{\rho} + \frac{z}{(2+2z^2)^{3/2}}\,\hat{z}\right)\cdot\left(\sqrt{2+2z^2}\,\hat{\rho} - z\,\hat{z}\right)d\phi\right)dz \\
&= 2\pi\int_{-1}^{1}\frac{2}{(2+2z^2)^{3/2}}\,dz \\
&= \sqrt{2}\pi\int_{-1}^{1}\frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} \\
&= 2\sqrt{2}\pi\int_0^1\frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} \\
&= [z = \tan\theta,\ 0 \le \theta \le \pi/4,\ dz = (1+\tan^2\theta)\,d\theta] \\
&= 2\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \\
&= 2\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi/4}\cos\theta\,d\theta \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Lösning 2: Låt C vara cylindern $C : x^2+y^2 = 3,\ -1 \le z \le 1$ och låt V vara den volym som avgränsas av den slutna ytan $S+C$. Inom V och på $S+C$ är $\mathbf{A}$ ett C^1-vektorfält med $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ inom V. Enligt Gauss' Sats har vi då att

$$\iint_{S+C}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = 0.$$

Av detta har vi att

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = -\iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\,dC.$$

Normalerna i dessa integraler pekar ut ur V, enligt Gauss' Sats. Vi eftersöker flödet genom S bort från z-axeln, och då är det sökta flödet

$$\Phi = -\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\,dC$$

där $\hat{\mathbf{n}}_C$ pekar bort från z-axeln. Parametrisera (i cylinderkoordinater) C genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi,z) = \sqrt{3}\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$ med $(\phi,z)\in D$ där $D: 0\le\phi\le 2\pi,\ -1\le z\le 1$. Vi har då $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = \sqrt{3}\,\hat{\phi}\times\hat{z} = \sqrt{3}\,\hat{\rho}$, som är en normal till ytan C som pekar bort från z-axeln.

I cylinderkoordinater är

$$\mathbf{A} = \frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{\rho} + \frac{z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{z}$$

och på C har vi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi,z)) = \frac{\sqrt{3}}{(3+z^2)^{3/2}}\,\hat{\rho} + \frac{z}{(3+z^2)^{3/2}}\,\hat{z}.$$

Då har vi

$$
\begin{aligned}
\iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\,dC &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi,z))\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z)\,d\phi dz\\
&= \iint_D \left(\frac{\sqrt{3}}{(3+z^2)^{3/2}}\,\hat{\rho}+\frac{z}{(3+z^2)^{3/2}}\,\hat{z}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\,\hat{\rho}\right)\,d\phi dz\\
&= \iint_D \frac{3}{(3+z^2)^{3/2}}\,d\phi dz\\
&= 6\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{(3+z^2)^{3/2}}\,dz\\
&= 12\pi\int_{0}^{1}\frac{1}{(3+z^2)^{3/2}}\,dz\\
&= \left[z=\sqrt{3}\tan\theta,\ 0\le\theta\le\pi/6;\ dz=\sqrt{3}(1+\tan^2\theta)\,d\theta\right]\\
&= 12\pi\int_0^{\pi/6}\frac{\sqrt{3}(1+\tan^2\theta)}{(3+3\tan^2\theta)^{3/2}}\,d\theta\\
&= 12\pi\int_0^{\pi/6}\frac{\sqrt{3}(1+\tan^2\theta)}{3\sqrt{3}(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\,d\theta\\
&= 4\pi\int_0^{\pi/6}\frac{(1+\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\,d\theta\\
&= 4\pi\int_0^{\pi/6}\frac{(1}{(1+\tan^2\theta)^{1/2}}\,d\theta\\
&= 4\pi\int_0^{\pi/6}\cos\theta\,d\theta\\
&= 4\pi\,[\sin\theta]_0^{\pi/6}\\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$

Lösning 3: Lägg följande ytor till S: $L_1: x^2+y^2\le 3;\ z=1,\ L_2: x^2+y^2\le 3, z=-1;\ S_1:$ $x^2+y^2+z^2=1$. Observera att S_1 ligger innanför den kropp som avgränsas av $S+L_1+L_2$. Låt V beteckna den volym som avgränsas av $S+L_1+L_2+S_1$. Inom V är $\mathbf{A}$ ett C^1-vektorfält med $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ inom V. Då har vi, enligt Gauss' Sats,

$$\iint_{S+L_1+L_2+S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS=\iiint_V\nabla\cdot\mathbf{A}\,dV=0.$$

Således är

$$\iint_S\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS=-\iint_{L_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_{L_1}\,dL_1-\iint_{L_2}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_{L_2}\,dL_2-\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS_1.$$

Alla normalerna pekar ut ur V så att $\hat{\mathbf{n}}_{L_1}=\hat{z},\ \hat{\mathbf{n}}_{L_2}=-\hat{z}$ medan $\hat{\mathbf{n}}_1$ pekar in mot origo. Vi kan då skriva om resultatet ovan som

$$\iint_S\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS=-\iint_{L_1}\mathbf{A}\cdot\hat{z}\,dL_1+\iint_{L_2}\mathbf{A}\cdot\hat{z}\,dL_2+\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS_1$$

där $\hat{\mathbf{n}}_1$ nu pekar bort från origo.

Vi har

$$\begin{aligned}
\iint_{L_1} \mathbf{A}\cdot\hat{z}\,dL_1 &= \iint_{x^2+y^2\le 3} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi;\ 0\le\rho\le\sqrt{3},\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= \int_0^{\sqrt{3}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{(1+\rho^2)^{3/2}}\,\rho d\phi\right)d\rho \\
&= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\rho}{(1+\rho^2)^{3/2}}\,d\rho \\
&= 2\pi\left[-\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Vidare har vi

$$\begin{aligned}
\iint_{L_2} \mathbf{A}\cdot\hat{z}\,dL_2 &= -\iint_{x^2+y^2\le 3} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi;\ 0\le\rho\le\sqrt{3},\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= -\int_0^{\sqrt{3}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{(1+\rho^2)^{3/2}}\,\rho d\phi\right)d\rho \\
&= -2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\rho}{(1+\rho^2)^{3/2}}\,d\rho \\
&= -2\pi\left[-\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

För att beräkna $\iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS_1$ inför man sfäriska koordinater. Vi parametriserar S_1 genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta,\phi)=\hat{\mathbf{r}}$ med $(\theta,\phi)\in D$ där $D: 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi$. Då är $\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi=\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}$ som pekar bort från origo. I sfäriska koordinater har vi

$$\mathbf{A}=\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

och på S_1 har vi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\phi))=\hat{\mathbf{r}}.$$

Vi har nu

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS_1 &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\phi)) \cdot \left(\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi\right) \, d\theta d\phi \\
&= \iint_D \hat{\mathbf{r}} \cdot (\sin\theta \, \hat{\mathbf{r}} \, d\theta d\phi \\
&= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\phi \right) \, d\theta \\
&= 4\pi.
\end{aligned}
$$

Insättning i

$$
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = -\iint_{L_1} \mathbf{A} \cdot \hat{z} \, dL_1 + \iint_{L_2} \mathbf{A} \cdot \hat{z} \, dL_2 + \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS_1
$$

ger

$$
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 2\pi.
$$

Lösning 4: Observera att skärningen mellan planet $z = 1$ och ytan S är cirkeln $x^2 + y^2 = 3$. Detsamma gäller skärningen mellan planet $z = -1$ och ytan S. Dessa cirklar uppstår genom skärningen mellan planen $z = \pm 1$ och sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Då lägger vi ytan $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ -1 \leq z \leq 1$ till S (S_1 buktar utåt då S buktar inåt då $-1 \leq z \leq 1$). Den slutna ytan $S + S_1$ avgränsar en kropp som vi betecknar med V och som definieras av olikhjeterna $z^2 + 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4 - z^2, \ -1 \leq z \leq 1$. Vektorfältet $\mathbf{A}$ är ett C^1-vektorfält med $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ inom V, och vi har då, enligt Gauss' Sats,

$$
\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = 0
$$

vilket ger

$$
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = -\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS_1.
$$

I den ovanstående kalkylen pekar alla normalerna ut ur V, vilket betyder att normalen $\hat{\mathbf{n}}$ till S pekar in mot z-axeln medan normalen $\hat{\mathbf{n}}_1$ till S_1 pekar bort från origo. Vi behöver flödet genom S bort från z-axeln, och då får vi att det sökta flödet är

$$
\Phi = -\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS_1.
$$

För att beräkna flödet ut ur S_1 inför vi sfäriska koordinater. I dessa koordinater ges S_1 genom $r = 2, \ \pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3, \ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi parametriserar S_1 genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta,\phi) = 2\hat{\mathbf{r}}$ med $(\theta,\phi) \in D$ där $D : \pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3, \ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vidare har vi $\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = (2\,\hat{\theta}) \times (2\sin\theta\,\hat{\phi}) = 4\,\hat{\mathbf{r}}$. Vektorfältet i sfäriska koordinater är

$$
\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}
$$

och på S_1 har vi

$$
\mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\phi)) = \frac{1}{4}\hat{\mathbf{r}}.
$$

Det sökta flödet är då

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS_1 \\
&= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot \left(\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi \right) \, d\theta d\phi \\
&= \iint_D \frac{1}{4} \hat{\mathbf{r}} \cdot (4 \, \hat{\mathbf{r}}) \, d\theta d\phi \\
&= \iint_D \sin\theta \, d\theta d\phi \\
&= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \left(\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\phi \right) \, d\theta \\
&= 2\pi \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin\theta \, d\theta \\
&= 2\pi \Big[-\cos\theta \Big]_{\pi/3}^{2\pi/3} \\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$

Lösning 5: Ett annat sätt att lösa uppgiften är att definiera det sökta flödet som en generaliserad integral med

$$
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \lim_{\epsilon \to 0_+} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_\epsilon
$$

där vi har $S : x^2 + y^2 - z^2 = 2, \ |z| \leq 1$ och $S_\epsilon : x^2 + y^2 - z^2 = 2, \ \epsilon \leq |z| \leq 1$. Då består S_ϵ av två delar: $x^2 + y^2 - z^2 = 2, \ \epsilon \leq z \leq 1$ samt $x^2 + y^2 - z^2 = 2, \ -1 \leq z \leq -\epsilon$.

Till S_ϵ lägger man ytorna $L_1 : z = 1, \ x^2 + y^2 \leq 3, \ L_2 : z = -1, \ x^2 + y^2 \leq 3, \ L_+ : z = \epsilon, \ x^2 + y^2 \leq 2 + \epsilon^2$ samt $L_- : z = -\epsilon, \ x^2 + y^2 \leq 2 + \epsilon^2$. Dessa ytor omslutar kroppen $V_\epsilon : x^2 + y^2 - z^2 \leq 2, \ \epsilon \leq |z| \leq 1$ (som består av två delar).

Inom V_ϵ är vektorfältet $\mathbf{A}$ ett C^1-vektorfält med $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Enligt Gauss' Sats har vi då att

$$
\iint_{S_\epsilon + L_1 + L_2 + L_+ + L_-} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_\epsilon = \iiint_{V_\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV_\epsilon = 0,
$$

och då har vi

$$
\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_\epsilon = -\iint_{L_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dL_1 - \iint_{L_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dL_2 - \iint_{L_+} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dL_+ - \iint_{L_-} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dL_-.
$$

På L_1 är $\hat{\mathbf{n}} = \hat{z}, \ z = 1$ och då är

$$
\begin{aligned}
\iint_{L_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dL_1 &= \iint_{x^2+y^2\le 3} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}\,dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ 0\le\rho\le\sqrt{3},\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+\rho^2)^{3/2}}\rho\,d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^{3/2}}\,d\rho \\
&= [u = 1+\rho^2] \\
&= \pi \int_1^4 \frac{du}{u^{3/2}} \\
&= \pi \left[-\frac{2}{\sqrt{u}} \right]_1^4 \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

På L_2 är $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{z},\ z=-1$ och då är

$$
\iint_{L_2} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dL_2 = \iint_{x^2+y^2\le 3} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}\,dxdy = \pi
$$

enligt kalkylen för flödet ut genom L_1.
På L_+ är $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{z},\ z=\epsilon$ och då är

$$
\iint_{L_+} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dL_+ = -\epsilon \iint_{x^2+y^2\le 2+\epsilon^2} \frac{1}{(x^2+y^2+\epsilon^2)^{3/2}}\,dxdy
$$

och på L_- är $\hat{\mathbf{n}} = \hat{z},\ z=-\epsilon$ vilket ger

$$
\iint_{L_-} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dL_- = -\epsilon \iint_{x^2+y^2\le 2+\epsilon^2} \frac{1}{(x^2+y^2+\epsilon^2)^{3/2}}\,dxdy.
$$

Vi har

$$
\begin{aligned}
&\iint_{x^2+y^2\le 2+\epsilon^2} \frac{1}{(x^2+y^2+\epsilon^2)^{3/2}}\,dxdy \\
&\qquad = [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ 0\le\rho\le\sqrt{2+\epsilon^2},\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&\qquad = \int_0^{\sqrt{2+\epsilon^2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\epsilon^2+\rho^2)^{3/2}}\rho\,d\phi\right) d\rho \\
&\qquad = 2\pi \int_0^{\sqrt{2+\epsilon^2}} \frac{1}{(\epsilon^2+\rho^2)^{3/2}}\rho\,d\rho \\
&\qquad = [u=\epsilon^2+\rho^2] \\
&\qquad = \pi \int_{\epsilon^2}^{2+2\epsilon^2} \frac{1}{u^{3/2}}\,du \\
&\qquad = \pi \left[-\frac{2}{\sqrt{u}}\right]_{\epsilon^2}^{2+2\epsilon^2} \\
&\qquad = 2\pi \left[-\frac{1}{\sqrt{2+2\epsilon^2}} + \frac{1}{\epsilon}\right] \\
&\qquad = -\frac{2\pi}{\sqrt{2+2\epsilon^2}} + \frac{2\pi}{\epsilon}.
\end{aligned}
$$

Av detta följer att

$$\iint_{L_+} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dL_+ = \iint_{L_-} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dL_- = \frac{2\pi\epsilon}{\sqrt{2+2\epsilon^2}} - 2\pi.$$

Således erhåller vi att

$$\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS_\epsilon = 2\pi - \frac{4\pi\epsilon}{\sqrt{2+2\epsilon^2}}$$

och då följer att

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \lim_{\epsilon\to 0_+} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS_\epsilon = 2\pi.$$