

TATA44 Lösningar 29/8/2018.

1.) Lösning 1: Ytan S är $z = 4 - (x^2 + y^2)$, $z \geq 2$ och parametriseras av Ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = x\hat{x} + y\hat{y} + (4 - x^2 - y^2)\hat{z}$ med $(x, y) \in D$ där $D : x^2 + y^2 \leq 2$. En standardräkning ger

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = 2x\hat{x} + 2y\hat{y} + \hat{z}$$

av vilket det följer att

$$|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}.$$

Vi har då

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{1}{1 + 4(x^2 + y^2)} dS &= \iint_D \frac{1}{1 + 4(x^2 + y^2)} |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| dx dy \\ &= 3 \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} dx dy \\ &= [x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\rho^2}} d\phi \right) \rho d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho}{\sqrt{1 + 4\rho^2}} d\rho \\ &= [u = 1 + 4\rho^2] \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^9 \frac{du}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{\pi}{2} [\sqrt{u}]_1^9 \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Lösning 2: Ytan kan parametriseras med hjälp av cylinderkoordinater: Ortsvektorn för punkter på $S : z = 4 - \rho^2$, $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$ är då $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\hat{\rho} + (4 - \rho^2)\hat{z}$ med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har då $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} - 2\rho\hat{z}) \times (\rho\hat{\phi} = 2\rho^2\hat{\rho} + \rho\hat{z})$. Den sökta integralen är nu

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{1}{1+4(x^2+y^2)} dS &= \iint_D \frac{1}{1+4\rho^2} |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho d\phi \\
&= \iint_D \frac{1}{1+4\rho^2} \sqrt{\rho^2+4\rho^4} d\rho d\phi \\
&= \iint_D \frac{\rho}{1+4\rho^2} \sqrt{1+4\rho^2} d\rho d\phi \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1+4\rho^2}} d\phi \right) \rho d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho}{\sqrt{1+4\rho^2}} d\rho \\
&= [u = 1+4\rho^2] \\
&= \frac{\pi}{4} \int_1^9 \frac{du}{\sqrt{u}} du \\
&= \frac{\pi}{2} [\sqrt{u}]_1^9 \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

2.) En standardräkning ger $\nabla \cdot \mathbf{A} = x^2 + y^2 + z^2$. Låt S beteckna ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x \geq 0$ och $S_1 : x = 0$, $y^2 + z^2 \leq 4$. Låt V beteckna den kropp som omslutes av $S + S_1$. V ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x \geq 0$. Då har vi enligt Gauss' Sats att

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$

Observera att i Gauss' Sats pekar **alla normaler ut** ur kroppen och i synnerhet blir $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{x}} > 0$ på S . Normalen till S_1 är $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{\mathbf{x}}$ (och inget annat) eftersom den pekar ut ur kroppen V . Vi får då

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1.$$

Vi har

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 = 0$$

eftersom $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = -\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = -xy^2 = 0$ ty $x = 0$ på S_1 .

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\
&= [x = r \cos \phi \sin \theta, y = r \sin \phi \sin \theta, z = r \cos \theta, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi, -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2] \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^\pi \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^4 \sin \theta d\phi \right) d\theta \right) dr \\
&= \pi \int_0^2 \left(\int_0^\pi r^4 \sin \theta d\theta \right) dr \\
&= \pi \left(\int_0^2 r^4 dr \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \\
&= \frac{64\pi}{5}.
\end{aligned}$$

3.) Lösning 1: Standardräkningar ger

$$\nabla \times \mathbf{A} = 3(y^2 - z^2)\hat{x} + 3(z^2 - x^2)\hat{y} + 3(x^2 - y^2)\hat{z}.$$

Ytorna skär varandra då $x^2 + 2y^2 = 4 - (x^2 + 2y^2)$ vilket ger $z = x^2 + 2y^2 = 2$. Låt S vara den del av planet $z = 2$ med $x^2 + 2y^2 \leq 2$ och sätt $D : x^2 + 2y^2 \leq 2$. Parametrisera S med Ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = x\hat{x} + y\hat{y} + 2\hat{z}$ där $(x, y) \in D$. Vi har $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \hat{z}$ (efter en standardräkning). Stokes Sats ger nu (då Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$)

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\
&= \iint_D \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) dx dy \\
&= 3 \iint_D (x^2 - y^2) dx dy \\
&= [x = \rho \cos \phi, y = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sin \phi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= 3 \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{\sqrt{2}} \left[\cos^2 \phi - \frac{\sin^2 \phi}{2} \right] d\phi \right) d\rho \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \frac{3 \cos 2\phi}{4} \right] d\phi \right) \\
&= \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Lösning 2: Som ovan, ytorna skär varandra i kurvan $x^2 + 2y^2 = 2, z = 2$. Parametrisera kurvan med Ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \sqrt{2} \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} + 2\hat{z}$ med $\phi : 0 \rightarrow 2\pi$ (då kurvan genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$). Vidare har vi att

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) = (\sin^3 \phi + 8)\hat{x} + (2\sqrt{2} \cos^3 \phi + 8)\hat{y} + (\sin^3 \phi + 2\sqrt{2} \cos^3 \phi)\hat{z}.$$

Då är kurvintegralen

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \left[(\sin^3 \phi + 8) \hat{x} + (2\sqrt{2} \cos^3 \phi + 8) \hat{y} (\sin^3 \phi + 2\sqrt{2} \cos^3 \phi) \hat{z} \right] \cdot \left[-\sqrt{2} \sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \right] d\phi \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (2 \cos^4 \phi - \sin^4 \phi) d\phi \\
&= \left[\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}, \quad \sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2} \right] \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{8} + \frac{3}{2} \cos 2\phi + \frac{1}{8} \cos 4\phi \right] d\phi \\
&= \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

4.) En standard räkning ger att alla potentialer $\Phi(x, y, z)$ till \mathbf{A} ges av

$$\Phi(x, y, z) = xy^2z^3 + x^3yz^2 + x^2y^3z + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) En standard räkning (i cylinderkoordinater) ger $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $\rho \neq 0$. Låt Γ_1 vara kurvan $\Gamma_1 : \rho = 1, z = 0$ och S vara en C^1 -yta vars rand består av $\Gamma + \Gamma_1$ (och som inte skärs av z -axeln). Enligt Stokes' Sats har vi

$$\int_{\Gamma + \Gamma_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{n} dS = 0$$

och vi får då att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där både Γ och Γ_1 genomlöps moturs. Parametrisera Γ_1 med Ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho}$ med $\phi : 0 \rightarrow 2\pi$ (som motsvarar orienteringen moturs sett från punkten $(0, 0, 100)$). Vi har då

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\rho^2} \cos^2 \phi \hat{\phi} \right) \cdot \hat{\phi} d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi \\
&= \pi
\end{aligned}$$

eftersom $\rho = 1$ på Γ_1 . Således erhåller vi att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \pi.$$

6.) **Lösning 1:** I sfäriska koordinater är vektorfältet

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Ytan är (i sfäriska koordinater) $S : r = 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi, \pi/3 \leq \theta \leq \pi/2$ eftersom vi har $0 \leq z \leq 1$ och med $z = 2 \cos \theta$ så är $0 \leq \cos \theta \leq 1/2$, vilket ger $\pi/3 \leq \theta \leq \pi/2$ ty $0 \leq \theta \leq \pi$ i sfäriska koordinater. Parametrera ytan genom Ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = 2 \hat{\mathbf{r}}$$

med $(\theta, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi, \pi/3 \leq \theta \leq \pi/2$. Vi har då

$$\mathbf{r}'_{\theta} \times \mathbf{r}'_{\phi} = (2 \hat{\theta}) \times (2 \sin \theta \hat{\phi}) = 4 \sin \theta \hat{\mathbf{r}}.$$

Observera att på ytan S är

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4} \hat{\mathbf{r}}.$$

Det sökta flödet är då

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_{\theta} \times \mathbf{r}'_{\phi}) d\theta d\phi \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot (4 \sin \theta \hat{\mathbf{r}}) d\phi \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Lösning 2: I cylinderkoordinater kan ytan $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4, 0 \leq z \leq 1$ beskrivas som $S : z = \sqrt{4 - \rho^2}, \sqrt{3} \leq \rho \leq 2$. Parametrera denna yta med Ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho \hat{\rho} + \sqrt{4 - \rho^2} \hat{z}$ där $(\rho, \phi) \in D$ med $D : \sqrt{3} \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{\rho} \times \mathbf{r}'_{\phi} &= \left(\hat{\rho} - \frac{\rho}{\sqrt{4 - \rho^2}} \hat{z} \right) \times (\rho \hat{\phi}) \\ &= \frac{\rho^2}{\sqrt{4 - \rho^2}} \hat{\rho} + \rho \hat{z} \end{aligned}$$

som pekar bort från origo eftersom $\hat{\rho}$ -komponenten är positiv. Vidare är

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) = \frac{1}{8} \left(\rho \hat{\rho} + \sqrt{4 - \rho^2} \hat{z} \right).$$

Det sökta flödet är då

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi) \, d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{8} \iint_D (\rho \hat{\rho} + \sqrt{4 - \rho^2} \hat{z}) \cdot \left(\frac{\rho^2}{\sqrt{4 - \rho^2}} \hat{\rho} + \rho \hat{z} \right) \, d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3}}^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{4 - \rho^2}} \, d\phi \right) \, d\rho \\
&= \pi \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\rho}{\sqrt{4 - \rho^2}} \, d\rho \\
&= \pi \left[-\sqrt{4 - \rho^2} \right]_{\sqrt{3}}^2 \\
&= \pi.
\end{aligned}$$