TATA44 Lösningar 18/10/2017.

1.) Ytorna $z = x^2 + y^2$och $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ skär varandra då $x^2 + y^2 = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$. Med $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ har vi då $\rho^2 = 2 - \rho$ vilket ger $\rho^2 - \rho - 2 = (\rho+2)(\rho-1) = 0$. Då skär de varandra idå $x^2 + y^2 = 1$. Sätt $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Parametrisera S med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + x^2 + y^2\,\hat{z}$ med $(x,y) \in D$. En standardräkning ger

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = -2x\,\hat{x} - 2y\,\hat{y} + \hat{z}$$

av vilket det följer att

$$\left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right| = \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}.$$

Vi har då

$$\begin{aligned}
\iint_S z^2\,dS &= \iint_D (x^2+y^2)^2 \left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right|\,dxdy \\
&= \iint_D (x^2+y^2)^2 \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ \rho \leq 1,\ \ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^4\sqrt{1+4\rho^2}\,d\phi\right)\rho\,d\rho \\
&= 2\pi\int_0^1 \rho^5\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho \\
&= [u = 1+4\rho^2;\ du = 8\rho\,d\rho] \\
&= \frac{\pi}{64}\int_1^5 \left(u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}\right)\,du \\
&= \frac{\pi}{64}\left[\frac{2u^3\sqrt{u}}{7} - \frac{4u^2\sqrt{u}}{5} + \frac{2u\sqrt{u}}{3}\right]_1^5 \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{25\sqrt{5}}{21} - \frac{1}{105}\right].
\end{aligned}$$

2.) Lösning 1: En standardräkning ger $\nabla \cdot \mathbf{A} = x^2 + y^2$. Sätt $S : x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ 0 \leq z \leq 1$ samt $S_1 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1$ och $S_2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ z = 0$. Då har vi enligt Gauss' Sats att

$$\iint_{S+S_1+S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV$$

där V är den kropp som $S+S_1+S_2$ omsluter. Observera att i Gauss' Sats pekar **alla normaler ut** ur kroppen och i synnerhet blir $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} > 0$ på S. Villkoret $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} > 0$ avser **endast** normalen till ytan S och **inte** S_1 eller S_2. Normalen till S_1 är $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{z}$ (och inget annat) eftersom den pekar ut ur kroppen V och normalen till S_2 är $\hat{\mathbf{n}}_2 = -\hat{z}$. Vi får då

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iiint_V (x^2+y^2)\,dV - \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 - \iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 dS_2.$$

Vi har

$$\iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 = 0$$

eftersom $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 = 2(x^2+y^2)z = 0$ ty $z=0$ på S_2.

Vidare har vi

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 &= -2\iint_{x^2+y^2} dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1] \\
&= -2\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\rho^3\,d\phi\right)d\rho \\
&= -4\pi\int_0^1\rho^3\,d\rho \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

För att räkna ut $\iiint_V (x^2+y^2)\,dV$ sätter vi $V_1 : x^2+y^2+z^2\le 2,\ z\ge 0$ och $V_2 : x^2+y^2+z^2\le 2,\ z\ge 1$. Vi har då

$$\iiint_V (x^2+y^2)\,dV = \iiint_{V_1}(x^2+y^2)\,dV_1 - \iiint_{V_2}(x^2+y^2)\,dV_2.$$

Först har vi

$$\begin{aligned}
\iiint_{V_1}(x^2+y^2)\,dV_1 &= \iint_{x^2+y^2\le 2}\left(\int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)\,dz\right)dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 2}(x^2+y^2)\sqrt{2-x^2-y^2}\,dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi] \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\rho^3\sqrt{2-\rho^2}\,d\phi\right)d\rho \\
&= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{2-\rho^2}\,d\rho \\
&= [u=2-\rho^2;\ du=-2\rho\,d\rho] \\
&= -\pi\int_2^0(2-u)\sqrt{u}\,du \\
&= \pi\int_0^2[2u^{1/2}-u^{5/2}]du \\
&= \frac{16\pi\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
\iiint_{V_2} (x^2+y^2)\, dV_2 &= \iint_{0\le x^2+y^2\le 2} \left(\int_1^{\sqrt{2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz \right) dxdy \\
&= \iint_{0\le x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)[\sqrt{2-x^2-y^2}-1]\, dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi] \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho[\sqrt{2-\rho^2}-1]\, d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho^3[\sqrt{2-\rho^2}-1]\, d\rho \\
&= [u=2-\rho^2; du=-2\rho\, d\rho] \\
&= -\pi \int_2^1 (2-u)[\sqrt{u}-1]\, du \\
&= \pi \int_1^2 \left(2u^{1/2}-u^{3/2}+u-2\right)\, du \\
&= \frac{16\pi\sqrt{2}}{15} - \frac{43\pi}{30}.
\end{aligned}$$

Således är

$$\iiint_V (x^2+y^2)\, dxdy = \frac{43\pi}{30}$$

och vi får att det sökta flödet är

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}} dS &= \iiint_V (x^2+y^2)\, dV - \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 - \iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 \\
&= \frac{43\pi}{30} + \pi \\
&= \frac{73\pi}{30}
\end{aligned}$$

Lösning 2: Som ovan med undantag av beräkningen av $\iiint_V (x^2+y^2) dxdydz$ som kan beräknas på följande sätt:

Sätt $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ och införa cylinderkoordinater för att definiera V genom olikheterna $\rho \le \sqrt{2-z^2},\ 0\le z\le 1,\ 0\le\phi\le 2\pi$. Då har vi

$$
\begin{aligned}
\iiint_V (x^2+y^2)dV &= \iiint_V (x^2+y^2)dxdydz \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi] \\
&= \iiint_V \rho^3 d\phi d\rho dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2-z^2}} \rho^3\, d\rho\right) d\phi\right) dz \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 (2-z^2)^2\, dz \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 (z^4-4z^2+4)\, dz \\
&= \frac{43\pi}{30}.
\end{aligned}
$$

Resten av lösningen är som i Lösning 1.

Lösning 3: Låt C vara ytan $C: x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1$ och L vara ytan $L: 1\le x^2+y^2\le 2,\ z=0$. Då omsluter $S+C+L$ en kropp V och enligt Gauss' Sats har vi

$$
\iint_{S+C+L} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dxdydz = \iiint_V (x^2+y^2)\, dxdydz.
$$

Av detta har vi att det sökta flödet är

$$
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dxdydz = \iiint_V (x^2+y^2)\, dxdydz - \iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\, dC - \iint_L \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_L\, dL.
$$

Normalerna pekar ut ur kroppen V. Då är $\hat{\mathbf{n}}_L = -\hat{z}$ och vi har då att $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_L = 2(x^2+y^2)z = 0$ ty $z=0$ på L, vilket ger

$$
\iint_L \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_L\, dL = 0.
$$

Ytan C kan parametriseras genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi,z) = \hat{\rho} + z\,\hat{z}$ med $(\phi,z)\in D$ där $D: 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le z\le 1$ i cylinderkoordinater. Då är $\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z = \hat{\phi}\times\hat{z} = \hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{x}+\sin\phi\,\hat{y}$. Denna vektor pekar in i V och då måste vi ha

$$
\begin{aligned}
\iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\, dC &= -\iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi,z))\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z)\, d\phi dz \\
&= -\iint_D \begin{bmatrix}\cos^3\phi+\sin^4\phi \\ \sin^3\phi+z^5 \\ -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\phi \\ \sin\phi \\ 0\end{bmatrix} d\pi\, dz \\
&= -\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left[\cos^4\phi+\sin^4\phi+\sin^4\phi\cos\phi+z^5\sin\phi\right] d\phi\right) dz \\
&= -\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{4}+\frac{\cos 4\phi}{4}+\sin^4\phi\cos\phi+z^5\sin\phi\right] d\phi\right) dz \\
&= -\frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

där vi har

$$
\begin{aligned}
\cos^4\phi + \sin^4\phi &= (\cos^2\phi + \sin^2\phi)^2 - 2\sin^2\phi\cos^2\phi \\
&= 1 - \frac{\sin^2 2\phi}{2} \\
&= 1 - \frac{1-\cos 4\phi}{4} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\phi}{4}.
\end{aligned}
$$

Sedan har vi

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dxdydz &= \iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz \\
&= \iint_{1\le x^2+y^2\le 2}\left(\int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz\right)dxdy \\
&= \iint_{1\le x^2+y^2\le 2}\left[\sqrt{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)\right]dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ x=\rho\sin\phi] \\
&= \int_1^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\rho^3\sqrt{2-\rho^2}\,d\phi\right)d\rho \\
&= 2\pi\int_1^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{2-\rho^2}\,d\rho \\
&= [u=2-\rho^2,\ du=-2\rho d\rho] \\
&= \pi\int_0^1 (2-u)\sqrt{u}\,du \\
&= \frac{14\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

Av detta följer nu att det sökta flödet är

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \frac{14\pi}{15} + \frac{3\pi}{2} = \frac{73\pi}{30}.$$

3.) Standardräkningar ger

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{x} + \hat{y} + (x^2+y^2)\,\hat{z}.$$

Låt S vara den del av planet $2x+2y-z=0$ som är innanför cylindern $x^2+y^2-2x-2y=0$, det vill säga, innanför cylindern $(x-1)^2+(y-1)=2$. Sätt $D:(x-1)^2+(y-1)\le 2$. Parametrisera planet med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{x}+y\,\hat{y}+(2x+2y)\,\hat{z}$. Vi får $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y = -2\,\hat{x}-2\,\hat{y}+\hat{z}$. Stokes Sats ger nu då Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0,0,17)$ (så att ytan S är positivt orienterad)

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot\, d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS \\
&= \iint_D \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y))\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)\, dxdy \\
&= \iint_D [x^2+y^2-4]\, dxdy \\
&= [x = 1+\rho\cos\phi,\ y = 1+\rho\sin\phi,\ 0\le\rho\le\sqrt{2},\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} [\rho^2 + 2\rho(\cos\phi+\sin\phi) - 2]\, d\phi\right) \rho\, d\rho \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} [\rho^3 + \rho^2(\cos\phi+\sin\phi) - 2\rho]\, d\phi\right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{2} \rho^{\sqrt{2}}[\rho^3 - 2\rho]\, d\rho \\
&= 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} - \rho^2\right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= -2\pi.
\end{aligned}
$$

Av detta får vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot\, d\mathbf{r} = 2\pi$$

då Γ genomlöps medurs sett från punkten $(0,0,17)$.

4.) Lösning 1: Vektorfältet är ett potentialfält: med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ har vi $\Phi'_x = x^2+y^2+z^2, \quad \Phi'_y = 2xy+y^2+yz^2, \quad \Phi'_z = 2xz+y^2z$ och då erhåller man (efter standardräkningar)

$$\Phi = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2z^2}{2} + xy^2 + xz^2 + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Kurvans ändpunkter ligger i xy-planet då $z=0$ och då har vi $x+y=0,\ x^2+y^2=4$ vilket ger $y=-x$ samt $x^2=2$. Ändpunkterna till Γ är då $(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ och $(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$. Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0,17,0)$ och detta medför att startpunkten är $(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ och slutpunkten är $(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$. Vi har då

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \Phi(\sqrt{2},-\sqrt{2},0) - \Phi(-\sqrt{2},\sqrt{2},0) \\
&= 4\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Lösning 2: Vektorfältet är ett potentialfält (som är av klass C^1 överallt) och därmed är kurvintegralen oberoende av vägen. Ändpunkterna är, som ovan, $(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ och $(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$. Startpunkten är $(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ och slutpunkten är $(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$. Låt L vara linjen som förbinder dessa två punkter. L ges på parameterform som

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t : -\sqrt{2} \to \sqrt{2}.$$

Vi har nu

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathbf{A}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2t^2 \\ -t^2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} dt \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 3t^2\,dt \\
&= 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Lösning 3: Kurvan är skärningen mellan $x+y=0$ och $x^2+y^2+z^2=4$. Insättning av $y=-x$ i $x^2+y^2+z^2=4$ ger $2x^2+z^2=4$. När $z=0$ har vi $x=\pm\sqrt{2}$ och då är kurvans ändpunkter $(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$ och $(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$. Γ genomlöps moturs sett från $(0,17,0)$ så att startpunkten är $(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ och slutpunkten är $(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$. Vi kan då parametrisera Γ genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi)=-\sqrt{2}\,\hat{x}+\sqrt{2}\,\hat{y}+2\sin\phi\,\hat{z}$ med $\phi: 0\to\pi$. Då har vi (efter lite arbete)

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\pi \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot \mathbf{r}'(\phi)\,d\phi \\
&= \int_0^\pi \begin{bmatrix} 4 \\ 4\sqrt{2}\cos\phi\sin^2\phi - 2\cos^2\phi \\ 4\cos^2\phi\sin\phi - 4\sqrt{2}\cos\phi\sin\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}\sin\phi \\ -\sqrt{2}\sin\phi \\ 2\cos\phi \end{bmatrix} d\phi \\
&= \int_0^\pi \left[4\sqrt{2}\sin\phi + 8\cos^3\phi\sin\phi - 6\sqrt{2}\sin\phi\cos^2\phi - 8\cos\phi\sin^3\phi\right] d\phi \\
&= \left[-4\sqrt{2}\cos\phi - 2\cos^4\phi + 2\sqrt{2}\cos^3\phi - 2\sin^4\phi\right]_0^\pi \\
&= 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

5.) $\mathbf{A}$ kan skrivas som $\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2$ med $\mathbf{A}_1=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{x}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{y}$ och $\mathbf{A}_2=-y\,\hat{x}+x\,\hat{y}$. Om D är området innanför ellipsen $9x^2+4y^2=36$ då är, enligt Greens formel

$$\int_\Gamma \mathbf{A}_2\cdot d\mathbf{r} = 2\iint_D dxdy = 12\pi$$

eftersom denna dubbelintegral är arean av området D och arean av en ellips på kanonisk form $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ är πab. I det här fallet är $a=2,\ b=3$.

Vektorfältet $\mathbf{A}_1$ är singulärt i D och därmed inte av klass C^1 inom D (som krävs i Greens formel). Vi definierar $\Gamma_1: x^2+y^2=1$ och sätter S lika med det området mellan Γ och Γ_1, där $\mathbf{A}_1$ är av klass C^1. Då har vi, enligt Greens formel,

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_1\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right] dxdy = 0$$

och vi får då att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r}$$

där Γ genomlöps moturs medan Γ_1 genomlöps medurs. Parametrisera Γ_1 med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$ med $\phi : 2\pi \to 0$ (som motsvarar orienteringen medurs). Vi har då

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} &= -\int_{2\pi}^{0} \mathbf{A}_1(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi)\,d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}) \cdot (-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y})\,d\phi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Således erhåller vi att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 12\pi.$$

6.) I cylinderkoordinater är vektorfältet

$$\mathbf{A} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - z^2}}\hat{\rho}.$$

Ytan är (i cylinderkoordinater) $S : \rho = 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 1$. Parametrisera ytan genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\phi, z) = 2\hat{\rho} + z\,\hat{z}$$

med $(\phi, z) \in D$ där $D : 0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 1$. Vi har då

$$\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = 2\hat{\phi} \times \hat{z} = 2\hat{\rho}.$$

Det sökta flödet är då

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi, z)) \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z)\,d\rho d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{4}{\sqrt{4 - z^2}} d\phi \right) dz \\
&= 8\pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - z^2}} dz \\
&= 4\pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{4}}} dz \\
&= [u = z/2, \quad dz = 2du] \\
&= 8\pi \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du \\
&= 8\pi \ \arcsin \frac{1}{2} \\
&= \frac{4\pi^2}{3}.
\end{aligned}$$