**TATA44 Lösningar 7/1/2017.**

**1.)** Beteckna med $S$ ytan $z = \sqrt{x^2+y^2},\ z \leq 1$ och sätt $D : x^2+y^2 \leq 1$. Parametrisera $S$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + \sqrt{x^2+y^2}\,\hat{z}$ med $(x,y) \in D$. En standardräkning ger

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\hat{x} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\hat{y} + \hat{z}$$

av vilket det följer att

$$\left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right| = \sqrt{2}.$$

Vi har då

$$\begin{aligned}
\iint_S x^2\,dS &= \iint_D x^2 \left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right| \,dxdy \\
&= \sqrt{2}\iint_D x^2\,dxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ \rho \leq 1,\ \ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^2\cos^2\phi\,d\phi\right)\rho\,d\rho \\
&= \sqrt{2}\left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\phi}{2}\,d\phi\right) \\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

**2.)** En standardräkning ger $\nabla\cdot\mathbf{A} = x^2+y^2+3z^2$. Sätt $S : z = x^2+y^2,\ 0 \leq z \leq 1$ och $S_1 : x^2+y^2 \leq 1,\ z = 1$. Då har vi enligt Gauss' Sats att

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV$$

där $V$ är den kropp som $S+S_1$ omsluter. Observera att i Gauss' Sats pekar **alla normaler ut** ur kroppen och i synnerhet blir $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} < 0$ på $S$. Villkoret $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} < 0$ avser **endast** normalen till ytan $S$ och **inte** $S_1$. Normalen till $S_1$ är $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{z}$ (och inget annat) eftersom den pekar ut ur kroppen $V$. Området $V$ ges av olikheterna $x^2+y^2 \leq 1,\ \ x^2+y^2 \leq z \leq 1$.

Det sökta flödet är då

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV - \iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS_1.$$

På $S_1$ är $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{z}$ och $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 = x^2+y^2$ vilket ger

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 &= \iint_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)\,dxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ \ \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\rho^3\,d\phi\right)\,d\rho \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vidare har vi

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV &= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{x^2+y^2}^1 (x^2+y^2+3z^2)dz\right)dxdy\\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1}[1+x^2+y^2-(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)^3]\,dxdy\\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\quad \rho\le 1,\ 0\le\phi\le 2\pi]\\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}[\rho+\rho^3-\rho^5-\rho^7]\,d\phi\right)d\rho\\
&= 2\pi\int_0^1[\rho+\rho^3-\rho^5-\rho^7]\,d\rho\\
&= \frac{11\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

Av detta följer att det sökta flödet är

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS &= \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV - \iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS_1\\
&= \frac{5\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

**3.)** Låt $S$ beteckna ytan $z=4-(x^2+y^2),\ x,y,z\ge 0$ och sätt $D: x^2+y^2\le 4,\ x,y\ge 0$. Parametrisera $S$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y)=x\,\hat{x}+y\,\hat{y}+(4-x^2-y^2)\,\hat{z}$ där $(x,y)\in D$. Observera att $\Gamma$ är randen till ytan $S$. Standardräkningar ger

$$
\nabla\times\mathbf{A}=x\,\hat{x}-y\,\hat{y}+2(x+y)\,\hat{z},\quad \mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y=2x\,\hat{x}+2y\,\hat{y}+\ \hat{z}.
$$

Stokes Sats ger nu

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS \\
&= \iint_D \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y))\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)\,dxdy \\
&= 2\iint_D [(x^2-y^2)+x+y]\,dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ 0\le\rho\le 2,\ 0\le\phi\le\pi/2] \\
&= 2\int_0^2\left(\int_0^{\pi/2}[\rho^2(\cos^2\phi-\sin^2\phi)+\rho(\cos\phi+\sin\phi)]\,d\phi\right)\rho\,d\rho \\
&= 2\int_0^2\left(\int_0^{\pi/2}[\rho^3\cos 2\phi+\rho^2(\cos\phi+\sin\phi)]\,d\phi\right)\,d\rho \\
&= 2\int_0^2 \rho^2\left[\sin\phi-\cos\phi\right]_0^{\pi/2}\,d\rho \\
&= 4\int_0^2\rho^2\,d\rho \\
&= \frac{32}{3}.
\end{aligned}
$$

**4.)** Observera att vi har i cylinderkoordinater

$$\nabla\Phi = \Phi'_\rho + \frac{1}{\rho}\Phi'_\phi + \Phi'_z$$

och vi har då

$$\mathbf{A} = \nabla\Phi = \Phi'_\rho + \frac{1}{\rho}\Phi'_\phi + \Phi'_z$$

om $\Phi(\rho,\phi,z)$ är en potential till $\mathbf{A}$. Detta ger ekvationssystemet

$$\Phi'_\rho = 2\rho\cos^2\phi + z\sin\phi,\quad \Phi'_\phi = \rho z\cos\phi-(\rho^2+z^2)\sin 2\phi,\quad \Phi'_z = 2z\cos^2\phi+\rho\sin\phi.$$

Av den första ekvationen erhåller vi

$$\Phi = \rho^2\cos^2\phi + \rho z\sin\phi + g(\phi,z).$$

Insättning av detta i andra differentialekvationen ger

$$g'_\phi = -z^2\sin 2\phi = -2z^2\sin\phi\cos\phi$$

vilket i sin tur ger

$$g(\phi,z) = z^2\cos^2\phi + h(z)$$

och då har vi

$$\Phi(\rho^2+z^2)\cos^2\phi + \rho z\sin\phi + h(z).$$

Insättning av detta i den sista differentialekvationen ger $h'(z) = 0$ och då är $h(z) = C$, en konstant. Således har vi

$$\Phi(\rho^2 + z^2)\cos^2\phi + \rho z \sin\phi + C$$

där $C$ är en godtycklig konstant.

**5.)** I cylinderkoordinater skrivas $\mathbf{A}$ som

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\,\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\,\hat{\phi}$$

och en standardräkning ger $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $\rho \neq 0$. Låt $\Gamma_1$ vara kurvan $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$ och $S$ vara den yta som har $z$-axeln som symmetriaxeln och vars rand utgörs av kurvan $\Gamma + \Gamma_1$. Med hjälp av Stokes' Sats erhåller vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

där båda kurvorna genomlöps i samma riktning. Detta medför att $\Gamma_1$ genomlöps moturs i $xy$-planet. Parametrisera $\Gamma_1$ med ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho}, \quad \phi : 0 \to 2\pi.$$

Observera att $\mathbf{r}'(\phi) = \hat{\phi}$. Vi har då

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot\mathbf{r}'(\phi)d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} (\hat{\rho} + \hat{\phi})\cdot\hat{\phi}\,d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

**6.)** I cylinderkoordinater är vektorfältet

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\rho^2}\hat{\rho} + \frac{z}{\rho^3}\hat{\rho}.$$

Ytan är obegränsad. Parametrisera ytan genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\,\hat{\rho} + (2-\rho)\,\hat{z}$$

med $(\rho,\phi) \in D$ där $D : 0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Vi har då

$$\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = \rho\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}.$$

Det sökta flödet är då

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi)\,d\rho d\phi \\
&= 2\pi\int_0^\infty \frac{2}{\rho^2}d\rho \\
&= 2\pi\lim_{\epsilon\to 0_+}\int_\epsilon^1 \frac{2}{\rho^2}d\rho + 2\pi\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{2}{\rho^2}d\rho \\
&= 4\pi + 2\pi\lim_{\epsilon\to 0_+}\int_\epsilon^1 \frac{2}{\rho^2}d\rho.
\end{aligned}
$$

Denna integral existerar inte.

**Svar:** Flödesintegralen existerar inte.