TATA44 Lösningar 24/8/2016.

Observera att lösningarna i denna facit är förslag till lösningsgångar med **standardmetoder** som utgångspunkt. Det kan finnas andra lösningsgångar som är lika legitima men som inte tas upp här. Under rättningen tar jag ställning till ALLA de lösningsförslag som ni skriver, även om de inte använder sig av de metoder som jag gör.

1.) Ytorna $z = 3 - x^2 - y^2$ och $2x + 2y + z = 1$ skär varandra då $3 - x^2 - y^2 = 1 - 2x - 2y$ vilket ger $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$. Sätt $D : 0 \leq (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$. Vår yta S är den del av $z = 3 - x^2 - y^2$ för vilken $(x, y) \in D$.

Parametrisera ytan S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + (3 - x^2 - y^2)\,\hat{z}, \quad (x, y) \in D$. Vi har $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_x = (\hat{x} - 2x\,\hat{z}) \times (\hat{y} - 2y\,\hat{z}) = 2x\,\hat{x} + 2y\,\hat{y} + \hat{z}$. Den sökta arean är då

$$\begin{aligned} A &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y|\, dx\, dy \\ &= \iint_D \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, dx\, dy \end{aligned}$$

2.) Observera att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 1 + x^2 + y^2$ och att $\mathbf{A}$ är C^1 överallt. Sätt $S : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\ z \geq 0$ och $S_1 : z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 1$. Vidare låt V beteckna den kropp som avgränsas av ytorna S, S_1. Då definieras V genom olikheterna $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 \leq 1$. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV$$

där enhetsnormalen $\hat{n}$ pekar ut ur V. Således är det sökta flödet

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1.$$

För S_1 är $\hat{n}_1 = -\hat{z}$ och

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 = -\frac{1}{5} \iint_{S_1} dxdy = -\frac{\pi}{5}$$

eftersom $z = 0$ på S_1 och S_1 är enhetscirkelskivan. Således är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV + \frac{\pi}{5}.$$

Vi har nu

$$\begin{aligned}
\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV &= \iiint_V (1+x^2+y^2)dxdydz \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}}(1+x^2+y^2)dz\right)dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1}(1+x^2+y^2)(1-\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ \ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}(1+\rho^2)(1-\rho)\rho\,d\phi\right)d\rho \\
&= 2\pi\int_0^1(\rho-\rho^2+\rho^3-\rho^4)d\rho \\
&= \frac{13\pi}{30}
\end{aligned}$$

och då erhåller vi att det sökta flödet är

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \frac{19\pi}{30}.$$

3.) En standardräkning ger att $\nabla\times\mathbf{A} = (x^2+y^2)\,\hat{z}$. Cylindern $x^2+y^2=2x$ kan skrivas som $x^2-2x+y^2=0$ som ger, efter kvadratkomplettering, $(x-1)^2+y^2=1$. Kurvan Γ är randen till ytan $S: z=2-x^2-y^2$ med $(x-1)^2+y^2\le 1$. Sätt $D:(x-1)^2+y+^2\le 1$. Parametrisera S med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y)=x\,\hat{x}+y\,\hat{y}+(2-x^2-y^2)\,\hat{z}$ med $(x,y)\in D$. En enkel räkning ger $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y = 2x\,\hat{x}+2y\,\hat{y}+\hat{z}$. Enligt Stokes sats har vi nu att

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS \\
&= \iint_D(\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y))\cdot\left(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y\right)dxdy \\
&= \iint_D((x^2+y^2)\,\hat{z})\cdot(2x\,\hat{x}+2y\,\hat{y}+\hat{z})\,dxdy \\
&= \iint_D(x^2+y^2)\,dxdy \\
&= [x=1+\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ \ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}(1+\rho^2+2\rho\cos\phi)\rho\,d\phi\right)d\rho \\
&= 2\pi\int_0^1(\rho+\rho^3)\,d\rho \\
&= \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

4.) $\mathbf{A}$ är ett potentialfält endast om $\mathbf{A}=\nabla\Phi$ för någon funktion $\Phi(x,y,z)$. Då måste vi ha $\nabla\times\mathbf{A}=0$ som ger (efter en standard räkning) $f'(x)=4x,\quad g'(z)=2z$ och då är $f(x)=2x^2+C,\ \ g(z)=z^2+D$ med C,D godtyckliga konstanter. Med $\mathbf{A}=\nabla\Phi$ har vi nu

$$\Phi'_x = 4xy + 3x^2 + z^2 + D, \quad \Phi'_y = 2x^2 + 2yz + C, \quad \Phi'_z = y^2 + 2xz + 2z.$$

Ekvationen

$$\Phi'_x = 4xy + 3x^2 + z^2 + D$$

ger

$$\Phi = 2x^2y + x^3 + xz^2 + Dx + F(y,z).$$

Insättning av detta i

$$\Phi'_y = 2x^2 + 2yz + C$$

ger

$$F'_y(y,z) = 2yz + C$$

vilket ger $F(y,z) = y^2z + Cy + G(z)$ och då är

$$\Phi = 2x^2y + x^3 + xz^2 + Dx + y^2z + Cy + G(z).$$

Insättning av detta uttryck i

$$\Phi'_z = y^2 + 2xz + 2z$$

ger $G'(z) = 2z$ och då är $G(z) = z^2 + E$ och vi erhåller

$$\Phi = 2x^2y + x^3 + xz^2 + z^2 + y^2z + Dx + Cy + E$$

där C, D, E är godtyckliga konstanter.

5.) Observera att $\mathbf{A}$ kan skrivas som

$$\mathbf{A}_1 = \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}\,\hat{x} - \frac{x}{x^2+(y+1)^2}\,\hat{y}.$$

Med

$$P(x,y) = \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}, \quad Q(x,y) = -\frac{x}{x^2+(y+1)^2}$$

erhåller vi $P'_y - Q_x = 0$ i alla punkter $(x,y) \neq (0,-1)$. Låt Γ_1 vara kurvan $x^2 + (y+1)^2 = 1$ och D vara området mellan kurvorna Γ och Γ_1. Inom D är $\mathbf{A}$ ett C^1-vektorfält. Enligt Greens formel har vi då

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D [Q'_x - P'_y]dxdy = 0$$

vilket ger nu att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där båda kurvorna genomlöps moturs i xy-planet. Parametrisera Γ_1 med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \cos\phi\,\hat{x} + (\sin\phi - 1)\,\hat{y}$ (då har vi satt $x = \cos\phi,\ y = -1 + \sin\phi$) med $\phi : 0 \to 2\pi$ och vi får

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot \mathbf{r}'(\phi)\,d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin\phi\,\hat{x} - \cos\phi\,\hat{y})\cdot(-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y})\;d\phi \\
&= -\int_0^{2\pi} d\phi \\
&= -2\pi.
\end{aligned}
$$

6.) Lösning 1: En standard räkning ger $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ i alla punter där $x^2+y^2 \neq 0$.

Låt S vara ytan $x^2+y^2-z^2,\ 0\le z\le\sqrt{5}$ och C, L vara ytorna $C: x^2+y^2=4,\quad L: 4\le x^2+y^2\le 9,\ z=\sqrt{5}$. Vidare låt V vara den kropp som avgränsas av $S+C+L$. Inom V har $\mathbf{A}$ inga singulariteter och där råder $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ samt att $\mathbf{A}$ är ett C^1-vektorfält i ett område av V. Enligt Gauss' Sats har vi då

$$
\iint_{S+C+L} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV = 0
$$

där alla normaler till delytorna pekar ut ur V. Av detta erhåller vi

$$
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\,dC - \iint_L \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_L\,dL
$$

där $\hat{\mathbf{n}}_C$ nu pekar bort från z-axeln (och därmed ut ur C) och $\hat{\mathbf{n}}_L = \hat{z}$. L parametriseras av ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + \sqrt{5}\,\hat{z}$ med $(x,y)\in D,\ D: 4\le x^2+y^2\le 9$. Då är

$$
\begin{aligned}
\iint_L \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_L\,dL &= -\frac{5}{2}\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&\quad [x=\rho\cos\phi,\quad y=\rho\sin\phi,\quad 2\le\rho\le 9,\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= -\frac{5}{2}\int_2^3\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)d\rho \\
&= -5\pi.
\end{aligned}
$$

Ytan C parametriseras av ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi,z) = 2\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$ med $(\phi,z)\in E$ där $E: 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le z\le\sqrt{5}$. Observera att

$$
\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = 2\hat{\rho}\times\hat{z} = 2\,\hat{\rho}
$$

och på C är

$$
\mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi,z)) = z\,\hat{\rho} - \frac{z^2}{4}\,\hat{z}.
$$

Då har vi

$$
\begin{aligned}
\iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\,dC &= \iint_E \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi,z))\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z)d\phi\,dz \\
&= \iint_E \left(z\,\hat{\rho}-\frac{z^2}{4}\,\hat{z}\right)\cdot(2\,\hat{\rho})d\phi\,dz \\
&= 2\int_0^{\sqrt{5}}\left(\int_0^{2\pi} z\,d\phi\right)dz \\
&= 10\pi
\end{aligned}
$$

och det sökta flödet är då

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= \iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\,dC - \iint_L \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_L\,dL \\
&= 15\pi.
\end{aligned}
$$

Lösning 2: I cylinderkoordinater har vi

$$
\mathbf{A} = z\,\hat{\rho} - \frac{z^2}{2\rho}\,\hat{z}
$$

och ytan parametriseras av ortsvektorn

$$
\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\,\hat{\rho} + \sqrt{\rho^2-4}\,\hat{z}
$$

med $(\rho,\phi)\in D$ och $D: 2\le\rho\le 3,\ \ 0\le\phi\le 2\pi$. Observera att på ytan har vi

$$
\mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi)) = \sqrt{\rho^2-4}\,\hat{\rho} - \frac{(\rho^2-4)}{2\rho}\,\hat{z}.
$$

Vidare är

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}'_\rho(\rho,\phi)\times\mathbf{r}'_\phi(\rho,\phi) &= \left(\hat{\rho}+\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-4}}\,\hat{z}\right)\times\left(\rho\,\hat{\phi}\right) \\
&= -\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2-4}}\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}.
\end{aligned}
$$

Denna vektor pekar in mot z-axeln eftersom $\hat{\rho}$-komponenten är negativ. Det sökta flödet är då

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS \\
&= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_\rho)\, d\rho\, d\phi \\
&= \iint_D \left(\sqrt{\rho^2 - 4}\, \hat{\rho} - \frac{(\rho^2 - 4)}{2\rho}\, \hat{z} \right) \cdot \left(\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - 4}} \hat{\rho} - \rho\, \hat{z} \right)\, d\rho\, d\phi \\
&= \int_2^3 \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{3\rho^2}{2} - 2 \right)\, d\phi \right) d\phi \\
&= 2\pi \int_2^3 \left(\frac{3\rho^2}{2} - 2 \right) d\rho \\
&= 15\pi.
\end{aligned}
$$

Integralerna i denna andra lösning borde väl (i den matematiska stränghetens namn) skrivas som generaliserade integraler eftersom de innehåller termen

$$
\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - 4}} \hat{\rho} - \rho\, \hat{z}
$$

som inte är definierad i $\rho = 2$. Men den singulära termen i detta uttryck “mulitpliceras bort”när man integrerar $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_\rho)$ och då kan man (välvilligt) bortse från generaliserade integraler.