

TATA44 Lösningar 8/1/2016.

1.) Inför cylinderkoordinater ρ, ϕ, z . Ytorna $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2} = 3 - \rho$ och $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + \rho$ skär varandra då $3 - \rho = 1 + \rho$ vilket ger $\rho = 1$. Sätt $D : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vår yta S är den del av $z = 3 - \rho$ för vilken $(\rho, \phi) \in D$.

Parametrisera ytan S genom Ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho \hat{\rho} + (3 - \rho) \hat{z}$, $(\rho, \phi) \in D$. Vi har $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} - \rho \hat{z}) \times (\rho \hat{\phi}) = \rho \hat{\rho} + \rho \hat{z}$. Den sökta arean är då

$$\begin{aligned} A &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho d\phi \\ &= \sqrt{2} \iint_D \rho d\rho d\phi \\ &= 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 \rho d\rho \\ &= \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

2.) Observera att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 4$ och att \mathbf{A} är C^1 överallt. Sätt $S : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0$ och $S_1 : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$. Vidare låt V beteckna den kropp som avgränsas av ytorna S, S_1 . Då definieras V genom olikheterna $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1$. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$

där enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ pekar ut ur V . Således är det sökta flödet

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1.$$

För S_1 är $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{z}$ och

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 = - \iint_{S_1} dx dy = -\pi$$

eftersom $z = 0$ på S_1 och S_1 är enhetscirkelskivan. Således är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV + \pi.$$

Vi har nu

$$\begin{aligned}
\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= 4 \iiint_V dx dy dz \\
&= 4 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\int_0^{1-x^2-y^2} dz \right) dx dy \\
&= 4 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1-x^2-y^2) dx dy \\
&= [x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= 4 \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1-\rho^2) \rho d\phi \right) d\rho \\
&= 8\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

och då erhåller vi att det sökta flödet är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 3\pi.$$

3.) En standardräkning ger att $\nabla \times \mathbf{A} = 3\hat{x} + x\hat{y} + 2y\hat{z}$. Kurvan Γ är randen till ytan $S : 2x + 2y + z = 1, z \geq x^2 + y^2$. Ytorna $2x + 2y + z = 1$ och $z = x^2 + y^2$ skär varandra då $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 1$ vilket ger $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 3$. Sätt $D : (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 3$. Parametrisera S med Ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = x\hat{x} + y\hat{y} + (1-2x-2y)\hat{z}$ med $(x, y) \in D$. En enkel räkning ger $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = 2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}$. Enligt Stokes sats har vi nu att

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\
&= \iint_D (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}(x, y))) \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) dx dy \\
&= \iint_D (3\hat{x} + x\hat{y} + 2y\hat{z}) \cdot (2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}) dx dy \\
&= \iint_D (6 + 2x + 2y) dx dy \\
&= [u = x + 1, v = y + 1] \\
&= \iint_E (2u + 2v + 2) dudv \quad \text{där området } E \text{ definieras som } E : u^2 + v^2 \leq 3 \\
&= 2 \iint_E dudv \\
&= 6\pi.
\end{aligned}$$

Observera att $\iint_E u dudv = \iint_E v dudv = 0$ eftersom $\iint_E u dudv = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\int_{-\sqrt{3-v^2}}^{\sqrt{3-v^2}} u du \right) dv = 0$ och en liknande räkning visar att $\iint_E v dudv = 0$.

4.) \mathbf{A} är ett potentialfält endast om $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion $\Phi(r, \theta, \phi)$. Då måste vi ha

$$\Phi'_r = 2r \sin 2\theta \cos \phi + a \sin \theta \sin \phi, \quad \Phi'_\theta = (b+1)r^2 \cos 2\theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi, \quad \Phi'_\phi = cr^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi + r \sin \theta \cos \phi$$

För att en lösning till detta system av partiella differentialequationer ska existera måste även $\Phi''_{r\theta} = \Phi''_{\theta r}$ och $\Phi''_{r\phi} = \Phi''_{\phi r}$. Detta ger (efter lite arbete) $a = 1, b = 1, c = -2$ och ekvationssystemet blir då

$$\Phi'_r = 2r \sin 2\theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi$$

$$\Phi'_\theta = 2r^2 \cos 2\theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi$$

$$\Phi'_\phi = -r^2 \sin 2\theta \sin \phi + r \sin \theta \cos \phi$$

Ekvationen

$$\Phi'_r = 2r \sin 2\theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi$$

ger $\Phi = r^2 \sin 2\theta \cos \phi + r \sin \theta \sin \phi + g(\theta, \phi)$.

Insättning av detta i

$$\Phi'_\theta = 2r^2 \cos 2\theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi$$

ger $g'_\theta = 0$ och insättning i

$$\Phi'_\phi = -r^2 \sin 2\theta \sin \phi + r \sin \theta \cos \phi$$

ger $g'_\phi = 0$ Således erhåller vi

$$\Phi = r^2 \sin 2\theta \cos \phi + r \sin \theta \sin \phi + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) Observera att \mathbf{A} kan skrivas som $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ med

$$\mathbf{A}_1 = x \hat{x} + y \hat{y}$$

och

$$\mathbf{A}_2 = \frac{y}{3x^2 + 2y^2} \hat{x} - \frac{x}{3x^2 + 2y^2} \hat{y}.$$

Vi har $\mathbf{A}_1 = \nabla \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)$ och då är $\int_\Gamma \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = 0$ eftersom \mathbf{A}_1 är ett C^1 -vektorfält med potential $\frac{x^2 + y^2}{2}$.

En standardräkning ger

$$\nabla \times \mathbf{A}_2 = 0$$

i alla punkter där $(x, y) \neq (0, 0)$. Låt Γ_1 vara kurvan $3x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$. Kurvan $\Gamma + \Gamma_1$ utgör randen till en yta S med $S : x^2 + y^2 \geq 1, 3x^2 + 2y^2 \leq 1, z = 0$. Enligt Stokes Sats har vi

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

och av detta följer att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r}$$

där Γ och Γ_1 genomlöps i samma positiva riktning (moturs: observera att S ska ligga till vänster om genomlöpningsriktningen för att Stokes' Sats ska gälla; här kan man välja moturs för Γ_1 vilket innebär att Γ genomlöps medurs). På Γ_1 är $\rho = 1$. Vi parametriserar Γ_1 genom Ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\phi) = \frac{\cos \phi}{\sqrt{3}} \hat{x} + \frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} \hat{y}$$

med $\phi : 0 \leq \phi \leq \pi$. Vi får nu

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\pi \mathbf{A}_2(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} \hat{x} - \frac{\cos \phi}{\sqrt{3}} \hat{y} \right] \cdot \left[-\frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \hat{x} + \frac{\cos \phi}{\sqrt{2}} \hat{y} \right] d\phi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^\pi d\phi \\ &= -\frac{\pi}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Således har vi

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} [\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2] \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

6.) Vektorfältet kan skrivas i cylinderkoordinater som

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2\rho^2} [\rho \hat{\rho} + 2z \hat{z}].$$

Ytan ges nu genom ekvationen $S : z = 3 - \rho^2$, $1 \leq \rho \leq \sqrt{3}$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ och vi parametriserar S genom Ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho \hat{\rho} + (3 - \rho^2) \hat{z}$, $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 1 \leq \rho \leq \sqrt{3}$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} - 2\rho \hat{z}) \times (\rho \hat{\phi}) = 2\rho^2 \hat{\rho} + \rho \hat{z}$. Enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ ska riktas bort från z -axeln. Vi har

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm \frac{\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi}{|\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi|}$$

och kravet att flödet ska vara riktat bort från z -axeln medför att vi måste ha

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi}{|\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi|}$$

eftersom $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = 2\rho^2 \hat{\rho} + \rho \hat{z}$ har positiv ρ -komponent. Det sökta flödet är då

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi) \, d\rho d\phi \\
&= \iint_D \frac{1}{2\rho^2} [\rho \hat{\rho} + 2(3 - \rho^2) \hat{z}] \cdot [2\rho^2 \hat{\rho} + \rho \hat{z}] \, d\rho d\phi \\
&= 3 \iint_D \frac{1}{\rho} \, d\rho d\phi \\
&= 6\pi \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\rho} \, d\rho \\
&= 3\pi \ln 3.
\end{aligned}$$