**TATA44 Lösningar 10/1/2015.**

**1.)** Inför cylinderkoordinater $(\rho, \phi, z)$. Sfären har ekvationen $\rho^2 + (z+1)^2 = 5$ och paraboloiden har ekvationen $z = \rho^2$. Dessa två ytor skär varandra då $z + (z+1)^2 = 5$ vilket ger $z^2 + 3z - 4 = 0$ som kan skrivas som $(z+4)(z-1) = 0$ och då $z \geq 0$ på paraboloiden så måste ytorna skära varandra då $z = 1$. Vi söker arean av $S : z = \rho^2,\ 0 \leq \rho \leq 1$ och vi parametriserar $S$ genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + \rho^2\,\hat{z}$ med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi &= (\hat{\rho} + 2\rho\,\hat{z}) \times (\rho\,\hat{\phi}) \\ &= -2\rho^2\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}. \end{aligned}$$

Arean av $S$ är nu

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho d\phi \\ &= \iint_D \sqrt{\rho^2 + 4\rho^4}\, d\rho d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 4\rho^2}\rho\, d\rho \\ &= [t = 1 + 4\rho^2] \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^5 t^{1/2} dt \\ &= \frac{\pi}{6} \left[5\sqrt{5} - 1\right]. \end{aligned}$$

**2.)** Observera att $\nabla \cdot \mathbf{A} = y^2$ och att $\mathbf{A}$ är $C^1$ överallt. Sätt $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x, y, z \leq 0$ och $S_1 : z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \leq 0$ $\ S_2 : y = 0,\ x^2 + z^2 \leq 1,\ x, z \leq 0$ $\ S_3 : x = 0,\ z^2 + y^2 \leq 1,\ y, z \leq 0$ . Vidare låt $V$ beteckna den kropp som avgränsas av ytorna $S, S_1, S_2, S_3$. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1+S_2+S_3} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV$$

där enhetsnormalen $\hat{n}$ pekar ut ur $V$. Således är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 - \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 - \iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 dS_3.$$

För $S_1$ är $\hat{n}_1 = \hat{z}$ och

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 = \iint_{S_1} z(x^2 + y^2)\, dxdy = 0$$

eftersom $z = 0$ på $S_1$. På samma sätt får vi att

$$\iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 = -\iint_{S_2} y(x^2+z^2)\,dxdy = 0, \quad \iint_{S_3} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_3 dS_1 = \iint_{S_3} z^2x\,dxdy = 0$$

eftersom $\hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{y}$ och $\hat{\mathbf{n}}_3 = \hat{x}$ och $y=0$ på $S_2$, $x=0$ på $S_3$.

Således är

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV.$$

$V$ beskrivs i sfäriska koordinater $(r,\theta,\phi)$ som $0\le r\le 1,\ \pi/2\le\theta\le\pi,\ \pi\le\phi\le 3\pi/2$ och vi har $y = r\sin\phi\sin\theta$ i sfäriska koordinater. Vi har nu

$$\begin{aligned}\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV &= \iiint_V y^2dxdydz \\ &= \int_0^1\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_{\pi}^{3\pi/2} r^4\sin^3\theta\sin^2\phi\,d\phi\right)d\theta\right)dr \\ &= \left(\int_0^1 r^4dr\right)\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\right)\left(\int_{\pi}^{3\pi/2}\sin^2\phi\,d\phi\right).\end{aligned}$$

Vi har

$$\int_{\pi}^{3\pi/2}\sin^2\phi\,d\phi = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi/2}[1-\cos 2\phi]d\phi = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta = [t=\cos\theta] = \int_{-1}^{0}[1-t^2]dt = 2/3.$$

$$\int_0^1 r^4dr = 1/5.$$

Vi erhåller nu att det sökta flödet är

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \frac{\pi}{30}.$$

**3.)** En standardräkning ger att $\nabla\times\mathbf{A} = 3(x^2+y^2)\,\hat{z}$. Kurvan $\Gamma$ är randen till ytan $S$ : $x^2+y^2+z^2=1,\ x,y,z\le 0$. Enligt Stokes sats har vi nu att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$$

där normalen $\hat{\mathbf{n}}$ till $S$ pekar i samma riktning som $\hat{\mathbf{r}}$ då $\Gamma$ genomlöps från punkten $(1,0,0)$ till $(0,1,0)$ och sedan till $(0,0,1)$ och till slut till $(1,0,0)$ . Parametrisera $S$ genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta,\phi) = \hat{\mathbf{r}}$ med $(\theta,\phi)\in D$ där $D: 0\le\theta,\phi\le\pi/2$. Observera att $\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi = \sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}$ och att $\nabla\times\mathbf{A} = 3(x^2+y^2)\,\hat{z} = 3\sin^2\theta\,\hat{z}$. Vi har nu

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS \\
&= \iint_D (\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\phi))\cdot\left(\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi\right)d\theta d\phi \\
&= 3\iint_D \sin^3\theta(\hat{z}\cdot\hat{\mathbf{r}})d\theta d\phi \\
&= 3\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta d\phi\right)d\theta \\
&= \frac{3\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta d\theta \\
&= [t=\sin\theta] \\
&= \frac{3\pi}{2}\int_0^1 t^3 dt \\
&= \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

**4.)** Standardräkningar med $\mathbf{A}=\nabla\Phi$ ger

$$\Phi(x,y,z)=x^3yz+xy^3z+xyz^3+C$$

där $C$ är en godtycklig konstant.

Planet $x-y=0$ skär $x^2+y^2+z^2=6$ längs kurvan $2x^2+z^2=6$ med $x,y,z\geq 0$. Startpunkten är $z=0, 2x^2=6, x=y$ i $xy$-planet och då är startpunkten $(\sqrt{3},\sqrt{3},0$. Slutpunkten är $(0,0,\sqrt{6})$. Eftersom $\mathbf{A}=\nabla\Phi$ så har vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\Phi(0,0,\sqrt{6})-\Phi(\sqrt{3},\sqrt{3},0)=0.$$

**5.)** En standardräkning ger

$$\nabla\times\mathbf{A}=0$$

i alla punkter där $x^2+y^2\neq 0$. Låt $\Gamma_1$ vara kurvan $x^2+y^2=1,\ z=0$. Kurvan $\Gamma+\Gamma_1$ utgör randen till en yta $S$ på cylindern. Enligt Stokes Sats har vi

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS=0$$

och av detta följer att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\int_{\Gamma_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

där $\Gamma$ och $\Gamma_1$ genomlöps i samma positiva riktning (moturs: observera att $S$ ska ligga till vänster om genomlöpningsriktningen för att Stokes' Sats ska gälla; här kan man välja moturs för $\Gamma_1$ vilket innebär att $\Gamma$ genomlöps medurs). På $\Gamma_1$ är $\rho=1$. Vi parametriserar $\Gamma_1$ gernom ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi)=\hat{\rho}$ med $0\leq\phi\leq 2\pi$. Obervera att $\mathbf{r}'(\phi)=\hat{\phi}$. Vi har

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot \mathbf{r}'(\phi)d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \hat{\phi}\cdot \phi d\phi \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Således har vi

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

**6.)** Vektorfältet kan skrivas som

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

i sfäriska koordinater $(r,\theta,\phi)$. En standardräkning ger $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $r \neq 0$. Sätt $S: x^2+2y^2+3z^2 = 1,\ z \geq 0$ och $S_1 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z\geq 0$ samt $S_2 : 1 \leq x^2+2y^2,\ x^2+y^2 \leq 1,\ z = 0$. Låt nu $V$ beteckna det område som omslutas av $S+S_1+S_2$ (observera att $S$ ligger innanför $S_1$). I $V$ gäller $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ och $\mathbf{A}$ är $C^1$ inom $V$ och på dess rand $S+S_1+S_2$. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1+S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = 0$$

där $\hat{\mathbf{n}}$ pekar ut ur $V$. Av detta följer att

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = -\iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS_1 - \iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2\,dS_2.$$

Vi har

$$\iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2\,dS_2 = 0$$

ty $\hat{\mathbf{n}}_2 = -\hat{z}$ och då är $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 = -\dfrac{z}{r^3} = 0$ ty $z = 0$ på $S_2$. Vi erhåller nu

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS_1$$

där både $\hat{\mathbf{n}}$ och $\hat{\mathbf{n}}_1$ pekar bort från origo. På $S_1$ är $r = 1$ och då är $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}$. Parametrisera $S_1$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta,\phi) = \hat{\mathbf{r}}$ där $(\theta,\phi)\in D$ och $D : 0 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0\leq\phi\leq 2\pi$. Vi har $\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = \sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}$. Det sökta flödet är nu

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS &= \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, dS_1 \\
&= \iint_D \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi\right)\, d\theta d\phi \\
&= \iint_D \sin\theta\, (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\, d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\phi \right) d\theta \\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$