TATA44 Lösningar 27/8/2014.

1.) Sfären $x^2+y^2+(z-2)^2 = 4$ skär paraboloiden $z = 4-(x^2+y^2)$ då $4-z+(z-2)^2 = 4$ och då är $z^2-5z+4 = 0$, som ger $(z-1)(z-4) = 0$. Då skär ytorna varandra i $z = 4$ och $z = 1$. $z = 4$ då $x^2+y^2 = 0$ och $z = 1$ då $x^2+y^2 = 3$. Vi söker arean av $S : z = 4-(x^2+y^2)$, $0 \leq x^2+y^2 \leq 3$ och vi parametriserar S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + (4-\rho^2)\,\hat{z}$ med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \rho \leq \sqrt{3},\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi &= (\hat{\rho} - 2\rho\,\hat{z}) \times (\rho\,\hat{\phi}) \\ &= 2\rho^2\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}. \end{aligned}$$

Arean av S är nu

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho d\phi \\ &= \iint_D \sqrt{\rho^2 + 4rho^4}\, d\rho d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+4\rho^2}\rho\, d\rho \\ &= [t = 1+4\rho^2] \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^{13} t^{1/2} dt \\ &= \frac{\pi}{6}\left[13\sqrt{13} - 1\right]. \end{aligned}$$

2.) En standardräkning ger att $\nabla \times \mathbf{A} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$. Kurvan Γ är randen till ytan $S : x+y+z = 1,\ x, y, z \geq 0$. Enligt Stokes sats har vi nu att

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

där normalen $\hat{\mathbf{n}}$ till S pekar i samma riktning som $\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$, då γ genomlöps moturs sett från $(17, 17, 17)$. Parametrisera S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = x\hat{x} + y\hat{y} + (1-x-y)\hat{z}$ med $(x, y) \in D$ där $D : x+y \leq 1,\ x, y \geq 0$. Observera att $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$ och vi har

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ &= \iint_D (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y dxdy \\ &= 3 \iint_D dxdy \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

eftersom $\iint_D dxdy$ är arean av triangeln D i xy-planet.

3.) Lösning 1: Observera att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3$ och att $\mathbf{A}$ är C^1 överallt. Sätt $S : z = 4 - x^2 - y^2,\ 0 \leq z \leq 3$ och $S_1 : z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 4,\quad S_2 : z = 1,\ x^2 + y^2 \leq 3$. Vidare låt V beteckna den kropp som avgränsas av ytorna S, S_1, S_2. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1+S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}$$

där enhetsnormalen $\hat{n}$ pekar ut ur V. Således är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 - \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_2 dS_2.$$

För S_1 är $\hat{n}_1 = -\hat{z}$ och

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 &= -\iint_{S_1} xydxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= -\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \cos\phi \sin\phi d\phi \right) \rho d\rho = 0
\end{aligned}$$

För S_2 är $\hat{n}_2 = \hat{z}$ och

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_2 dS_2 &= \iint_{S_2} (3 + xy)dxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (3 + \rho^2 \cos\phi \sin\phi) d\phi \right) \rho d\rho \\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

Observera att $\iiint_V dV = \iiint_{V_1} dV_1 - \iiint_{V_2} dV_2$ där $V_1 : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \leq 2$ och $V_2 : 3 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1$. Vi har i cylinderkoordinater $V_1 : 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 4 - \rho^2$ medan $V_2 : 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 3 \leq z \leq 4 - \rho^2$ och med ett variabelbyte till cylinderkoordinater erhåller vi

$$\begin{aligned}
\iiint_{V_1} dV_1 &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{4-\rho^2} dz \right) d\phi \right) \rho d\rho \\
&= 8\pi
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
\iiint_{V_2} dV_2 &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_3^{4-\rho^2} dz \right) d\phi \right) \rho d\rho \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

vilket ger

$$\iiint_V dV = 8\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}.$$

Av detta följer att det sökta flödet är

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS &= \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV - \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_1 dS_1 - \iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_2 dS_2 \\
&= 3\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV - 3\pi \\
&= \frac{39\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Lösning 2: Vi kan skriva

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \nabla\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2} + xyz\right) \\
&= \frac{1}{2}\nabla\left(x^2+y^2+z^2+2xyz\right) \\
&= \frac{1}{2}\nabla\left(\rho^2+z^2+\rho^2 z\sin 2\phi\right) \quad \text{i cylinderkoordinater} \\
&= \frac{1}{2}\left(2\rho(1+z\sin 2\phi)\,\hat{\rho} + 2\rho z\cos 2\phi\,\hat{\phi} + \rho^2\sin 2\phi\,\hat{z}\right) \\
&= \rho(1+z\sin 2\phi)\,\hat{\rho} + \rho z\cos 2\phi\,\hat{\phi} + \frac{\rho^2\sin 2\phi}{2}\,\hat{z}.
\end{aligned}$$

Ytan S ges genom $z = 4-\rho^2,\ 1\le\rho\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi$ och parametriseras genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\,\hat{\rho} + (4-\rho^2)\,\hat{z}$ med $(\rho,\phi)\in D$ där $D: 1\le\rho\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi$. Vi har $\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} - 2\rho\,\hat{z})\times(\rho\,\hat{\phi}) = 2\rho^2\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{\phi}$ som pekar ut ur ytan, bort från z-axeln. Det sökta flödet är

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS \\
&= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi)d\rho\,d\phi \\
&= \iint_D \left[2\rho^3(1+\sin 2\phi) + \rho(4-\rho^2) + \frac{\rho^3}{2}\sin 2\phi\right]d\rho\,d\phi \\
&= \int_1^2\left(\int_0^{2\pi}\left[2\rho^3(1+\sin 2\phi) + \rho(4-\rho^2) + \frac{\rho^3}{2}\sin 2\phi\right]d\phi\right)d\rho \\
&= 2\pi\int_1^2(\rho^3+4\rho)d\rho \ \text{ ty } \int_0^{2\pi}\sin 2\phi\,d\phi = 0 \\
&= 2\pi\left[2\rho^2 + \frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \\
&= \frac{39\pi}{2}.
\end{aligned}$$

4.) Standardräkningar med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ ger

$$\Phi(x, y, z) = x^2 z + xy^2 + yz^2 + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Planet $x = 1$ skär $z = 4 - x^2 - y^2$ längs kurvan $z = 3 - y^2$. Eftersom $z \geq 0$ så måste $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$. Kurvans startpunkt är således $(1, \sqrt{3}, 0)$ och slutpunkten är $(1, -\sqrt{3}, 0)$. Eftersom $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ så har vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(1, -\sqrt{3}, 0) - \Phi(1, -sqrt3, 0) = 0.$$

5.) Vi har

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

i alla punkter där $x^2 + y^2 \neq 0$. Låt Γ_1 vara kurvan $x^2 + y^2 = 9,\ z = 0$. Kurvan $\Gamma + \Gamma_1$ utgör randen till en yta S på paraboloiden. Enligt Stokes Sats har vi

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} DS = 0$$

och av detta följer att

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där Γ och Γ_1 genomlöps i samma poasitiva riktning (moturs: observera att S ska ligga till vänster om genomlöpningsriktningen för att Stokes' Sats ska gälla; här kan man välja moturs för Γ_1 vilket innebär att Γ genomlöps medurs). På Γ_1 är $z = 0$ och med $x = 3\cos\phi,\ y = 3\sin\phi$ där $\phi : 0 \to 2\pi$ så kan vi parametrisera ortsvektorn för Γ_1 som $\mathbf{r}(\phi) = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\pi\,\hat{y}$. Vi har nu

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin\phi}{3}\hat{x} + \frac{\cos\phi}{3}\hat{y}\right) \cdot (-3\sin\phi\hat{x} + 3\cos\phi\hat{y})\, d\phi \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Således har vi

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

6.) Inför sfäriska koordinater (r, θ, ϕ). Ytan $S : x^2 + y^21 + z^2 = 9$ beskrivs genom olikheterna $D : r = 3, \pi/3 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$ Parametrisera S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta, \phi) = 3\hat{\mathbf{r}}$. Det sökta flödet är

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi \, d\theta d\phi \\
&= \iint_D \frac{1}{9} \hat{\mathbf{r}} \cdot (9 \sin\theta \hat{\mathbf{r}}) d\theta d\phi \\
&= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\phi \right) d\theta \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$