

TATA 44 Vektoranalys. TEN 1.**2013-10-31, kl 14.00–18.00**

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n , $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter.

Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.

Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

1. Beräkna arean av den del av sfären $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ som är innanför sfären $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 3$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = z^2x\hat{x} + y^3\hat{y} + 2zx^2\hat{z}$ ut genom ytan $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ då $z \geq 0$. Normalen pekar bort från origo. Motivera noga.

3. Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = 3r^2 \sin^2 \theta \cos \phi \hat{r} + r^2 \sin 2\theta \cos \phi \hat{\theta} - r^2 \sin \theta \sin \phi \hat{\phi}$$

och Γ är skärningskurvan mellan planet $x + y = 0$ och ytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$ med $x \leq 0$, $y, z \geq 0$. Orientering är moturs sett från punkten $(1, 1, 0)$ av råtten Robert när han tittar upp mot punkten $(0, 0, \sqrt{3})$.

4. Bestäm konstanterna a, b så att vektorfältet

$$\mathbf{A}(\rho, \phi, z) = (a + 1)\rho z^2 \sin^2 \phi \hat{\rho} + (b + 3)\rho z^2 \sin 2\phi \hat{\phi} + 2\rho^2 z \sin^2 \phi \hat{z}$$

har en potential och beräkna då alla potentialer till \mathbf{A} .

5. Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x, y) = \left[x + \frac{y}{3x^2 + 2y^2} \right] \hat{x} + \left[y - \frac{x}{3x^2 + 2y^2} \right] \hat{y}$$

och Γ är kurvan $5x^2 + 6y^2 = 50$ i xy -planet. Kurvan genomlöps moturs.

6. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \hat{x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \hat{y} - \frac{z}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \hat{z}$$

genom ytan $x^2 + 2y^2 = z^2 + 2$, $0 \leq z \leq \sqrt{2}$, bort från z -axeln.

TATA44 Lösningar 31/10/2013.

1.) Lösning 1: Sfären $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ skär sfären $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 3$ då $(z-3)^2 - (z-1)^2 = 2$ och enkla räkningar ger nu $z = 3/2$. Vi söker arean av $S : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, 3/2 \leq z \leq 2$ och vi parametriserar S genom Ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho \hat{\rho} + (1 + \sqrt{1 - \rho^2}) \hat{z}$ med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ (observera att $\rho = \sqrt{3}/2$ då $z = 3/2$ och $\rho = 0$ då $z = 2$). Vi har

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi &= \left(\hat{\rho} - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \hat{z} \right) \times (\rho \hat{\phi}) \\ &= \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} \hat{\rho} + \rho \hat{z}.\end{aligned}$$

Arean av S är nu

$$\begin{aligned}A(S) &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho d\phi \\ &= \iint_D \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho \\ &= 2\pi \left[-\sqrt{1-\rho^2} \right]_0^{\sqrt{3}/2} \\ &= 2\pi \left[1 - \frac{1}{2} \right] \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Lösning 2: Sfären $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ skär sfären $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 3$ då $(z-3)^2 - (z-1)^2 = 2$ och enkla räkningar ger nu $z = 3/2$. Vi söker arean av $S : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, 3/2 \leq z \leq 2$ och vi parametriserar S genom Ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = \cos \phi \sin \theta \hat{x} + \sin \phi \sin \theta \hat{y} + (1 + \cos \theta) \hat{z} = \sin \theta \hat{\rho} + (1 + \cos \theta) \hat{z}.$$

När $z = 3/2$ då är $\cos \theta = 1/2$ ty $z = 1 + \cos \theta$. Vidare är $x^2 + y^2 = 3/4$ vilket medför att $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sin \theta = \sqrt{3}/2$, och då måste $\theta = \pi/3$ då $z = 3/2$. Då är $(\theta, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \theta \leq \pi/3, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har

$$\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = (\cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{z}) \times (\sin \theta \hat{\phi}) = \sin^2 \theta \hat{\rho} + \sin \theta \cos \theta \hat{z},$$

och vi erhåller

$$\begin{aligned}
A(S) &= \iint_S dS \\
&= \iint_D |\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi| d\theta d\phi \\
&= \iint_D \sin \theta d\theta d\phi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/3} \sin \theta d\theta \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

2.) En standardräkning ger att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 2x^2 + 3y^2 + z^2$. Lägg till ytan $S_1 : 2x^2 + 3y^2 \leq 1, z = 0$. Ytorna $S + S_1$ avgränsar en kropp $V : 2x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$. Flödet av \mathbf{A} ut ur V genom S är

$$\Phi_1 = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS$$

Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V (2x^2 + 3y^2 + z^2) dx dy dz.$$

På S_1 är $z = 0$ och $\hat{n} = -\hat{z}$ och då är $\mathbf{A} \cdot \hat{n} = 2zx^2 = 0$ på S_1 , vilket nu ger att

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS \\
&= \iiint_V (2x^2 + 3y^2 + z^2) dx dy dz \\
&= \left[x = \frac{r}{\sqrt{2}} \cos \phi \sin \theta, y = \frac{r}{\sqrt{3}} \sin \phi \sin \theta, z = r \cos \theta, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} r^4 \sin \theta d\phi \right) d\theta \right) dr \\
&= \frac{2\pi}{5\sqrt{6}} \\
&= \frac{\pi\sqrt{6}}{15}.
\end{aligned}$$

3.) **Lösning 1:** En standardkalkyl (i sfäriska koordinater) ger

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ 3r^2 \sin^2 \theta \cos \phi & r^3 \sin 2\theta \cos \phi & -r^3 \sin^2 \theta \sin \phi \end{vmatrix} = 0.$$

(Man måste ta hänsyn till skalfaktorerna i första och tredje raderna! Se formelbladet.) Då är \mathbf{A} ett potentialfält med $\mathbf{A} = \nabla \Phi(r, \theta, \phi)$. Observera att

$$\mathbf{A} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\phi}.$$

Vi har då följande ekvationssystemet:

$$\Phi'_r = 3r^2 \sin^2 \theta \cos \phi, \quad \Phi'_\theta = r^3 \sin 2\theta \cos \phi, \quad \Phi'_\phi = -r^3 \sin^2 \theta \sin \phi.$$

Ekvationen $\Phi'_r = 3r^2 \sin^2 \theta \cos \phi$ ger $\Phi = r^3 \sin^2 \theta \cos \phi + g(\theta, \phi)$ där $g(\theta, \phi)$ är en godtycklig C^1 -funktion. Insättning av detta uttryck för Φ i ekvationen $\Phi'_\theta = r^3 \sin 2\theta \cos \phi$ ger $g'_\theta = 0$, och insättning av samma uttryck för Φ i $\Phi'_\phi = -r^3 \sin^2 \theta \sin \phi$ ger $g'_\phi = 0$. Således är $g = C$, en godtycklig konstant och vi har då

$$\Phi(r, \theta, \phi) = r^3 \sin^2 \theta \cos \phi + C.$$

Planet $x+y=0$ skär $x^2+2y^2+3z^2=9$ i cirkeln $x^2+z^2=3$, $y=-x$. Eftersom $x \leq 0$ medan $y, z \geq 0$ och kurvan genomlöps moturs sett från $(1, 1, 0)$, så är startpunkten $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0)$ i xy -planet och slutpunkten är $(0, 0, \sqrt{3})$ på z -axeln. Översatt till sfäriska koordinater, startpunkten är $(r, \theta, \phi) = (\sqrt{6}, \pi/2, 3\pi/4)$ och slutpunkten är $(r, \theta, \phi) = (\sqrt{3}, 0, 3\pi/4)$. Då $\mathbf{A} = \nabla\Phi$, får vi att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\sqrt{3}, 0, 3\pi/4) - \Phi(\sqrt{6}, \pi/2, 3\pi/4) = 6\sqrt{3}.$$

Lösning 2: \mathbf{A} är ett potentialfält om det finns $\Phi(r, \theta, \phi)$ med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$. Då gäller att

$$\mathbf{A} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\phi}.$$

Vi har då följande ekvationssystemet:

$$\Phi'_r = 3r^2 \sin^2 \theta \cos \phi, \quad \Phi'_\theta = r^3 \sin 2\theta \cos \phi, \quad \Phi'_\phi = -r^3 \sin^2 \theta \sin \phi,$$

som är lösbart eftersom $\Phi''_{r\theta} = \Phi''_{\theta r}$, $\Phi''_{r\phi} = \Phi''_{\phi r}$, $\Phi''_{\theta\phi} = \Phi''_{\phi\theta}$. Således är \mathbf{A} ett potentialfält. Resten av lösningen är som i Lösning 1.

4.) Lösning 1: Om \mathbf{A} är ett potentialfält då ska $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion Φ i det område där \mathbf{A} är definierat. En potential finns då om $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i detta område. Ekvationen

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{z} \\ \partial_\rho & \partial_\phi & \partial_z \\ (a+1)\rho z^2 \sin^2 \phi & (b+3)\rho^2 z^2 \sin 2\phi & 2\rho^2 z \sin^2 \phi \end{vmatrix} = 0$$

ger oss systemet

$$(b+2)\rho z \sin 2\phi = 0, \quad (a-1)\rho z \sin^2 \phi = 0, \quad (2b-a+5)z^2 \sin 2\phi = 0.$$

Dessa ekvationer ska hålla i ett område, vilket ger nu

$$a = 1, \quad b = -2.$$

För dessa värden är

$$\mathbf{A} = 2\rho z^2 \sin^2 \phi \hat{\rho} + \rho z^2 \sin 2\phi \hat{\phi} + 2\rho^2 z \sin^2 \phi \hat{z}.$$

Då har vi $\mathbf{A} = \nabla\Phi$. Observera att

$$\mathbf{A} = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$$

och då erhåller vi ekvationssystemet

$$\Phi'_\rho = 2\rho z^2 \sin^2 \phi, \quad \Phi'_\phi = \rho^2 z^2 \sin 2\phi, \quad \Phi'_z = 2\rho^2 z \sin^2 \phi.$$

Ekvationen $\Phi'_\rho = 2\rho z^2 \sin^2 \phi$ ger $\Phi = \rho^2 z^2 \sin^2 \phi + g(\phi, z)$. Insättning av detta i $\Phi'_\phi = \rho^2 z^2 \sin 2\phi$ ger $g'_\phi(\phi, z) = 0$ och insättning i $\Phi'_z = 2\rho^2 z \sin^2 \phi$ ger $g'_z(\phi, z) = 0$.

Vi ser nu att

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \rho^2 z^2 \sin^2 \phi + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Lösning 2: Om \mathbf{A} är ett potentialfält då ska $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion $\Phi(\rho, \phi, z)$ i det område där \mathbf{A} är definierat. Vi har då

$$\mathbf{A} = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$$

och detta ger ekvationssystemet

$$\Phi'_\rho = (a+1)\rho z^2 \sin^2 \phi, \quad \Phi'_\phi = (b+3)\rho^2 z^2 \sin 2\phi, \quad \Phi'_z = 2z\rho^2 \sin^2 \phi.$$

Detta system har en lösning endast om

$$\Phi''_{\rho\phi} = \Phi''_{\phi\rho}, \quad \Phi''_{\rho z} = \Phi''_{z\rho}, \quad \Phi''_{\phi z} = \Phi''_{z\phi},$$

och detta ger oss systemet

$$(a+1)\rho z^2 \sin 2\phi = 2(b+3)\rho z^2 \sin 2\phi, \quad 2\rho z(a+1) \sin^2 \phi = 4\rho z \sin^2 \phi, \quad (b+3)z\rho^2 \sin 2\phi = z\rho^2 \sin 2\phi,$$

som skall gälla i ett område (öppen mängd) och då måste $a+1 = 2$, $b+3 = 1$ vilket ger $a = 1$, $b = -2$. Då är \mathbf{A} ett potentialfält endast för $a = 1$, $b = -2$. Resten av lösningen är som i Lösning 1.

5.) Vektorfältet \mathbf{A} kan skrivas som $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ med

$$\mathbf{A}_1 = x\hat{x} + y\hat{y}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{y}{3x^2 + 2y^2}\hat{x} - \frac{x}{3x^2 + 2y^2}\hat{y}.$$

Enligt Greens formel får vi att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} x dx + y dy = 0.$$

(Ett annat sätt att se detta är att konstatera att \mathbf{A}_1 är ett C^1 -fält i alla punkter och är ett potentialfält med potential $\Phi(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$). För att behandla $\int_{\Gamma} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r}$ lägger vi till kurvan $\Gamma_1 : 3x^2 + 2y^2 = 1$. Sätt

$$P(x, y) = \frac{y}{3x^2 + 2y^2}, \quad Q(x, y) = -\frac{x}{3x^2 + 2y^2}.$$

Om D är området mellan Γ och Γ_1 så har vi enligt Greens formel

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma+\Gamma_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Av detta följer att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r}$$

där både Γ och Γ_1 genomlöps moturs. På Γ_1 är $3x^2 + 2y^2 = 1$ och vi kan parametrisera Γ_1 genom Ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \frac{\cos \phi}{\sqrt{3}} \hat{x} + \frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} \hat{y}$ med $\phi : 0 \rightarrow 2\pi$. På Γ_1 är $\mathbf{A}_2 = \frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} \hat{x} - \frac{\cos \phi}{\sqrt{3}} \hat{y}$ och vi får

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} \hat{x} - \frac{\cos \phi}{\sqrt{3}} \hat{y} \right] \cdot \left[-\frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \hat{x} + \frac{\cos \phi}{\sqrt{2}} \hat{y} \right] d\phi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= -\frac{\pi\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Vi får då

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\pi\sqrt{6}}{3}.$$

6.) Lösning 1: En standardkalkyl ger $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $x^2 + 2y^2 \neq 0$, d.v.s. i alla punkter förutom på z -axeln (där \mathbf{A} är singulärt). Vi lägger till följande ytor: cylindern $C : x^2 + 2y^2 = 2, 0 \leq z \leq \sqrt{2}$ och skivan $L : 2 \leq x^2 + 2y^2 \leq 4, z = \sqrt{2}$. Dessa ytor omsluter en kropp V inom vilken \mathbf{A} är ett C^1 -vektorfält och $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Enligt Gauss' Sats får vi nu att

$$\iint_{S+L+C} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = 0.$$

Alla normaler till de enskilda delytorna pekar ut från V . Vi har då att det sökta flödet är

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \iint_L \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_L dL - \iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C dS_C.$$

Parametrisera C med Ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi, z) = \sqrt{2} \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} + z \hat{z}$ med $(\phi, z) \in D$ där $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq \sqrt{2}$. Observera att vi då har

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{\phi} \times \mathbf{r}'_z &= \left(-\sqrt{2} \sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \right) \times \hat{z} \\ &= \cos \phi \hat{x} + \sqrt{2} \sin \phi \hat{y}. \end{aligned}$$

Vi ser att $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z$ pekar ut från z -axeln och således in i V ty $(\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z) \cdot \hat{\rho} = \cos^2 \phi + \sqrt{2} \sin^2 \phi \geq 0$.

Vi får

$$\iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C dS_C = - \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi, z)) \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z) d\phi dz$$

eftersom $\hat{\mathbf{n}}_C$ pekar in mot z -axeln. Sedan har vi

$$\begin{aligned} \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi, z)) \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z) d\phi dz &= \iint_D \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ \frac{\sqrt{2}}{z} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sqrt{2} \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} d\phi dz \\ &= \iint_D d\phi dz \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) dz \\ &= 2\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

och då erhåller vi

$$\iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C dS_C = -2\sqrt{2}\pi.$$

På skivan L är normalen $\hat{\mathbf{n}}_L = \hat{z}$ och $z = \sqrt{2}$ och då får vi

$$\begin{aligned} \iint_L \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_L dL &= - \iint_{2 \leq x^2 + 2y^2 \leq 4} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} dx dy \\ &= \left[x = r \cos \phi, y = \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \phi, \sqrt{2} \leq r \leq 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi \right] \\ &= - \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{d(x, y)}{d(r, \phi)} \right| \frac{\sqrt{2}}{r} d\phi \right) dr \\ &= - \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{r} d\phi \right) dr \\ &= - \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) dr \\ &= -2\pi(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Således erhåller vi

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ &= - \iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C dS_C - \iint_L \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_L dL \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

Lösning 2: En standardkalkyl ger $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $x^2 + 2y^2 \neq 0$, d.v.s. i alla punkter förutom på z -axeln (där \mathbf{A} är singulärt). Vi lägger till följande ytor: cylindern $C : x^2 + 2y^2 = 1$, $0 \leq z \leq \sqrt{2}$, skivan $S_1 : 1 \leq x^2 + 2y^2 \leq 2$, $z = 0$ och skivan $S_2 : 1 \leq x^2 + 2y^2 \leq 4$, $z = \sqrt{2}$. Dessa ytor omsluter en kropp V inom vilken \mathbf{A} är ett C^1 -vektorfält och $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Enligt Gauss' Sats får vi nu att

$$\iint_{S+S_1+S_2+C} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = 0.$$

Alla normaler till de enskilda delytorna pekar ut från V . Vi har då att det sökta flödet är

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 - \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 - \iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C dS_C.$$

Observera att normalen $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{z}$ och då är $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = -\frac{z}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} = 0$ på S_1 , vilket gör att

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 = 0.$$

Parametrisera C med Ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi, z) = \cos \phi \hat{x} + \frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} \hat{y} + z \hat{z}$ med $(\phi, z) \in D$ där $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq \sqrt{2}$. Observera att vi då har

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z &= \left(-\sin \phi \hat{x} + \frac{\cos \phi}{\sqrt{2}} \hat{y} \right) \times \hat{z} \\ &= \frac{\cos \phi}{\sqrt{2}} \hat{x} + \sin \phi \hat{y}. \end{aligned}$$

Vi ser att $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z$ pekar ut från z -axeln och således in i V ty $(\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z) \cdot \hat{\rho} = \frac{\cos^2 \phi}{\sqrt{2}} + \sin^2 \phi \geq 0$.

Vi får

$$\iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C dS_C = - \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi, z)) \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z) d\phi dz$$

eftersom $\hat{\mathbf{n}}_C$ pekar in mot z -axeln. Sedan har vi

$$\begin{aligned} \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi, z)) \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z) d\phi dz &= \iint_D \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} \\ -z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\cos \phi}{\sqrt{2}} \\ \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} d\phi dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_D d\phi dz \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

och då erhåller vi

$$\iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C dS_C = -2\pi.$$

På skivan S_2 är normalen $\hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{z}$ och $z = \sqrt{2}$ och då får vi

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 &= - \iint_{1 \leq x^2 + 2y^2 \leq 4} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} dx dy \\
&= \left[x = r \cos \phi, y = \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \phi, 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi \right] \\
&= -\sqrt{2} \int_1^2 \int_0^{2\pi} \left| \frac{d(x, y)}{d(r, \phi)} \right| \frac{1}{r} dr d\phi \\
&= -\sqrt{2} \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{r} dr d\phi \\
&= - \int_1^2 \int_0^{2\pi} dr d\phi \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

Således erhåller vi

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\
&= - \iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C dS_C - \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

Lösning 3: Parametrisera ytan genom att sätta $x = \rho \cos \phi$, $y = \frac{\rho \sin \phi}{\sqrt{2}}$ och då har vi $z = \sqrt{\rho^2 - 2}$ på ytan, och Ortsvektorn för punkter på ytan är $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho \cos \phi \hat{x} + \frac{\rho \sin \phi}{\sqrt{2}} \hat{y} + \sqrt{\rho^2 - 2} \hat{z}$. Vi har $(\rho, \phi) \in D$ där $D : \sqrt{2} \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vidare

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi &= \left(\cos \phi \hat{x} + \frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} \hat{y} + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2}} \hat{z} \right) \times \left(-\rho \sin \phi \hat{x} + \frac{\rho \cos \phi}{\sqrt{2}} \hat{y} \right) \\
&= -\frac{\rho^2 \cos \phi}{\sqrt{2}\sqrt{\rho^2 - 2}} \hat{x} - \frac{\rho^2 \sin \phi}{\sqrt{2}\sqrt{\rho^2 - 2}} \hat{y} + \frac{\rho}{\sqrt{2}} \hat{z}.
\end{aligned}$$

På ytan har vi

$$\mathbf{A} = \cos \phi \hat{x} + \frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} \hat{y} - \frac{\sqrt{\rho^2 - 2}}{\rho} \hat{z}.$$

Det sökta flödet är nu

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \\
&= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_\rho) \, d\phi \, d\rho \quad \text{eftersom normalen ska peka bort från } z\text{-axeln} \\
&= \iint_D \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{\rho^2 - 2}}{\rho} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\rho^2 \cos \phi}{\sqrt{2}\sqrt{\rho^2 - 2}} \\ \frac{\rho^2 \sin \phi}{\sqrt{2}\sqrt{\rho^2 - 2}} \\ -\frac{\rho}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \, d\phi \, d\rho \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_D \left[\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - 2}} + \sqrt{\rho^2 - 2} \right] \, d\phi \, d\rho \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{2(\rho^2 - 1)}{\sqrt{\rho^2 - 2}} \, d\phi \right) \, d\rho \\
&= 2\sqrt{2}\pi \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\rho^2 - 1}{\sqrt{\rho^2 - 2}} \, d\rho.
\end{aligned}$$

Enligt Hermites Rotansats (se läroböckerna i envariabel analys) sätter vi

$$\int \frac{\rho^2 - 1}{\sqrt{\rho^2 - 2}} \, d\rho = (A\rho + B)\sqrt{\rho^2 - 2} + \int \frac{K}{\sqrt{\rho^2 - 2}} \, d\rho.$$

Derivering av både vänster- och högerled ger nu

$$\frac{\rho^2 - 1}{\sqrt{\rho^2 - 2}} = A\sqrt{\rho^2 - 2} + (A\rho + B)\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2}} + \frac{K}{\sqrt{\rho^2 - 2}}$$

av vilket vi får att

$$\rho^2 - 1 = A(\rho^2 - 2) + (A\rho + B)\rho + K = 2A\rho^2 + B\rho + K - 2A$$

och nu ser vi att $A = 1/2$, $B = K = 0$ och vi har då

$$\int \frac{\rho^2 - 1}{\sqrt{\rho^2 - 2}} = \frac{\rho}{2}\sqrt{\rho^2 - 2} + C$$

och då är flödet

$$\begin{aligned}
\Phi &= 2\sqrt{2}\pi \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\rho^2 - 1}{\sqrt{\rho^2 - 2}} \, d\rho \\
&= 2\sqrt{2} \left[\frac{\rho}{2}\sqrt{\rho^2 - 2} \right]_{\sqrt{2}}^2 \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$