LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter Basarab-Horwath

TATA 44 Vektoranalys. TEN 1.
2013-08-28, kl 08.00–12.00

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter.
Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys.* Ingen räknedosa tillåten.
Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

---

1. Beräkna arean av den del av konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ som ligger mellan paraboloiden $2z = 1 + x^2 + y^2$ och planet $z = 0$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = z^2 x\hat{x} - (x^2 + z^2)y\hat{y} + x^2 z\hat{z}$ ut genom ytan $x^2 + y^2 = 2z^2 + 1$ då $0 \le z \le 1$. Normalen pekar bort från z-axeln.

3. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A} = 2zx\hat{x} + 2zy\hat{y} + (x^2 + y^2)^2\hat{z}$$

och Γ kurvan $\rho = 1 + \phi,\ z = 1$ med $0 \le \phi \le 2\pi$.

4. Bestäm konstanterna a och b sådana att vektorfältet

$$\mathbf{A} = ay^2\hat{x} + b(3xy - z^2)\hat{y} + (3z^2 - 4yz)\hat{z}$$

har en potential och beräkna då alla potentialer till $\mathbf{A}$.

5. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\hat{\phi}$$

och Γ är kurvan $3x^2 + 4y^2 = 12$. Kurvan genomlöps moturs.

6. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{(5 + x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(zx, zy, z^2)$$

genom cylinderytan $x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le z \le 2$.

TATA44 Lösningar 28/8/2013.

1.) Inför cylinderkoordinater. Konens ekvation är då $z = \rho$ och paraboloidens ekvation är $2z = 1 + \rho^2$. Dessa två ytor skär varandra då $2z = 1 + z^2$ som ger $z^2 - 2z + 1 = 0$ eller $(z-1)^2 = 0$, och då är $z = 1$. Vårt ytstycke ges då av $S : z = \rho,\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Sätt $D : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$ och parametrisera S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$. Vi har

$$\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} + \hat{z}) \times (\rho\,\hat{\phi}) = -\rho\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}.$$

Arean av S är nu

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho d\phi \\ &= \sqrt{2} \iint_D \rho\, d\rho d\phi \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho\, d\phi \right) d\rho \\ &= \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2.) En standardräkning ger att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Lägg till ytorna $S_1 : x^2 + y^2 \le 1,\ z = 0$ och $S_2 : x^2 + y^2 \le 3,\ z = 1$. Ytorna $S + S_1 + S_2$ avgränsar en kropp V. Flödet av $\mathbf{A}$ ut ur V genom S är

$$\Phi = \iint_{S+S_1+S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS$$

och vi har enligt Gauss' Sats

$$\iint_{S+S_1+S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dxdydz = 0,$$

och då är

$$\iint_{S+S_1+S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = -\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 - \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_2 dS_2.$$

På S_1 är $z = 0$ och $\hat{n}_1 = -\hat{z}$ och då är $\mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 = 0$ på S_1. På S_2 är $z = 1$ och $\hat{n}_2 = \hat{z}$ och där är

$$\mathbf{A} \cdot \hat{n}_2 = x^2.$$

Vi parametriserar S_2 med ortsvektorn (uttryckt i cylinderkoordinater (ρ, ϕ, z)) $\mathbf{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{z}$ med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \le \rho \le \sqrt{3},\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Vi erhåller då

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS \\
&= -\iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_2 dS_2 \\
&= -\iint_{S_2} x^2 dS_2 \\
&= -\iint_D \rho^2\cos^2\phi|\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi|d\rho\,d\phi \\
&= -\iint_D \rho^3\cos^2\phi\,d\rho\,d\phi \\
&= -\left(\int_0^{\sqrt{3}}\rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\,d\phi\right) \\
&= -\frac{9\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

3.) I cylinderkoordinater parametriserar vi kurvans ortsvektor som

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(\phi) &= \rho(\phi)\hat{\rho}+\hat{z} \\
&= (1+\phi)\hat{\rho}+\hat{z}
\end{aligned}
$$

vilket ger

$$
\mathbf{r}'(\phi) = \hat{\rho}+(1+\phi)\hat{\phi}.
$$

Vi har

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= 2zx\hat{x}+2zy\hat{y}+(x^2+y^2)^2\hat{z} \\
&= 2z(x\hat{x}+y\hat{y})+(x^2+y^2)^2\hat{z} \\
&= 2z\rho\hat{\rho}+\rho^4\hat{z} \\
&= 2(1+\phi)\hat{\rho}+(1+\phi)^4\hat{z}
\end{aligned}
$$

på kurvan Γ. Då är

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot\,d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}'(\phi)\,d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(2(1+\phi)\hat{\rho}+(1+\phi)^4\hat{z}\right)\cdot\left(\hat{\rho}+(1+\phi)\hat{\phi}\right)d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}2(1+\phi)d\phi \\
&= (2\pi+1)^2-1 \\
&= 4\pi(\pi+1).
\end{aligned}
$$

4.) Om $\mathbf{A}$ är ett potentialfält då ska $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion Φ i det område där $\mathbf{A}$ är definierat. En potential finns då om $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i detta område. Vi erhåller

$$\nabla \times \mathbf{A} = 2z(b-2)\hat{x} + (3b-2a)y)\,\hat{z}$$

och för att $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i ett område då måste $a = 3,\ b = 2$. För dessa värden har vi

$$\mathbf{A} = 3y^2\hat{x} + (6xy - 2z^2)\hat{y} + (3z^2 - 4yz)\hat{z},$$

och med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ då har vi

$$\Phi'_x = 3y^2, \quad \Phi'_y = 6xy - 2z^2, \quad \Phi'_z = 3z^2 - 4yz.$$

Ekvationen $\Phi'_x = 3y^2$ ger $\Phi = 3xy^2 + g(y,z)$. Insättning av detta i $\Phi'_y = 6xy - 2z^2$ ger $g'_y(y,z) = -2z^2$ vilket ger att $g(y,z) = -2yz^2 + h(z)$ och således har vi

$$\Phi = 3xy^2 - 2yz^2 + h(z).$$

Insättning i $\Phi'_z = 3z^2 - 4yz$ ger $h'(z) = 3z^2$ vilket nu ger att h där C är en godtycklig konstant. Vi erhåller då

$$\Phi = 3xy^2 - 2yz^2 + z^3 + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) Vektorfältet $\mathbf{A}$ är ett potentialfält för de punkter där $\rho \neq 0$ ty $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ då $\rho \neq 0$. Ett enkelt sätt att se detta är att skriva om

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$$

och med $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ och $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, vi får

$$\mathbf{A} = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{x} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{y},$$

och nu är det lätt att beräkna $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ för $x^2+y^2 \neq 0$. Detta medför att $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion Φ i ett område där $x^2+y^2 \neq 0$ och om Γ_1 är kurvan $x^2+y^2 = 1$ och S är ytan $x^2+y^2 \geq 1,\ 3x^2+4y^2 \leq 12,\ z = 0$ vi har, enligt Stokes' Sats, att

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{A}\,dS = 0$$

där Γ genomlöps motuurs medan Γ_1 genomlöps medurs, vilket ger nu

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

och där Γ_1 genomlöps nu moturs. På Γ_1 är $\rho = 1$ och ortsvektorn för Γ_1 är $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho}$, så att $\rho'(\phi) = \hat{\phi}$ och, då $0 \leq \phi \leq 2\pi$ på Γ_1, vi har

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\phi)\cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \hat{\phi}\cdot\hat{\phi}\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$

6.) Parametrisera S genom ortsvektorn (i cylinderkoordinater):

$$\mathbf{r}(\phi, z) = 2\hat{\rho} + z\hat{z}$$

med $(\phi, z) \in D$ där $D: 0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2$. På S har vi (i cylinderkoordinater)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{(9+z^2)^{3/2}}[2z\hat{\rho} + z^2\,\hat{z}].$$

Observera att

$$\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = 2\hat{\phi}\times\hat{z} = 2\hat{\rho}.$$

Flödet ut genom S är då

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}\, dS &= \iint_D \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z)\, d\phi\, dz \\
&= 2\iint_D \mathbf{A}\cdot\hat{\rho}\, d\phi\, dz \\
&= 4\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{z}{(9+z^2)^{3/2}} d\phi\right) dz \\
&= 8\pi \int_0^2 \frac{z}{(9+z^2)^{3/2}}\, dz \\
&= 8\pi \left[-\frac{1}{\sqrt{9+z^2}}\right]_0^2 \\
&= 8\pi\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{13}}\right].
\end{aligned}
$$