

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

Peter Basarab-Horwath

TATA 44 Vektoranalys. TEN 1.

2013-01-09, kl 14.00–18.00

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n , $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter.

Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.

Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

1. Beräkna arean av den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ som ligger innanför sfären $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = 9xz^2\hat{x} + yx^2\hat{y} + 4zy^2\hat{z}$ ut genom ytan $S : x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 4$ med $z \geq 0$, i riktning $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

3. Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A}(\rho, \phi, z) = 3\rho\hat{\rho} + 2\cos^2\phi\hat{\phi} + 4\hat{z}$ och Γ är skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ och $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$. Kurvan Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 6)$.

4. För vilka värden på konstanterna a, b, c är vektorfältet

$$\mathbf{A} = (6axy + by^2z + cyz^2)\hat{x} + (3x^2 + 2bxyz + xz^2)\hat{y} + (2xy^2 + 2cxyz)\hat{z}$$

ett potentialfält? Beräkna sedan alla potentialer till \mathbf{A} för dessa värden.

5. Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A}(\rho, \phi) = -\frac{\sin\phi}{\rho^2}\hat{\rho} + \frac{\cos\phi}{\rho^2}\hat{\phi}$ och Γ är kurvan mellan $4x^2 + 9y^2 = 4$ mellan punkterna $(1, 0)$ och $(0, -2/3)$. Kurvan genomlöps moturs från punkten $(1, 0)$ till punkten $(0, -2/3)$.

6. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{x} + \frac{y}{x^2 + y^2}\hat{y} + z\sqrt{x^2 + y^2}\hat{z}$$

genom ytan $S : z = 1 - x^2 - y^2$ med $z \geq 0$ i riktning $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

TATA44 Lösningar 9/1/2013.

1.) Sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ skär sfären $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ då $z^2 - (z - 1)^2 = 0$ och enkla räkningar ger nu $z = 1/2$. Vi söker arean av $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 1/2$ (då är $x^2 + y^2 \leq 3/4$) och vi parametriserar S genom Ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho \hat{\rho} + \sqrt{1 - \rho^2} \hat{z}$ med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi &= \left(\hat{\rho} - \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \hat{z} \right) \times (\rho \hat{\phi}) \\ &= \frac{\rho^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} \hat{\rho} + \rho \hat{z}.\end{aligned}$$

Arean av S är nu

$$\begin{aligned}A(S) &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho d\phi \\ &= \iint_D \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho \\ &= 2\pi \left[-\sqrt{1 - \rho^2} \right]_0^{\sqrt{3}/2} \\ &= 2\pi \left[1 - \frac{1}{2} \right] \\ &= \pi.\end{aligned}$$

2.) En standardräkning ger att $\nabla \cdot \mathbf{A} = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Lägg till ytan $S_1 : x^2 + 4y^2 \leq 4, z = 0$. Ytorna $S + S_1$ avgränsar en kropp $V : x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 4, z \geq 0$. Flödet av \mathbf{A} ut ur V genom S är

$$\Phi_1 = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS$$

Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V (x^2 + 4y^2 + 9z^2) dx dy dz.$$

På S_1 är $z = 0$ och $\hat{n} = -\hat{z}$ och då är $\mathbf{A} \cdot \hat{n} = 4zy^2 = 0$ på S_1 , vilket nu ger att

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS \\
&= \iiint_V (x^2 + 4y^2 + 9z^2) dx dy dz \\
&= [x = r \cos \phi \sin \theta, y = \frac{r}{2} \sin \phi \sin \theta, z = \frac{r}{3} \cos \theta, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \frac{1}{6} \int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} r^4 \sin \theta d\phi \right) d\theta \right) dr \\
&= \frac{32\pi}{15}.
\end{aligned}$$

3.) Ytorna skär varandra då $z^2 = (z - 2)^2$, vilket ger $z = 1$. Då är $\Gamma : x^2 + y^2 = 3, z = 1$. Vi parametriserar Γ med Ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \sqrt{3}\hat{\rho} + \hat{z}$ med $0 \leq \phi \leq 2\pi$ (Ortsvektorn är $\mathbf{r} = (x, y, z) = (\sqrt{3} \cos \phi, \sqrt{3} \sin \phi, 1)$ som man kan skriva som $\mathbf{r} = \sqrt{3}(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) + \hat{z} = \sqrt{3}\hat{\rho} + \hat{z}$). På Γ är $\rho = \sqrt{3}$ och $\mathbf{A} = 3\sqrt{3}\hat{\rho} + 2 \cos^2 \phi \hat{\phi} + 4\hat{z}$. Vi har

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} (3\sqrt{3}\hat{\rho} + 2 \cos^2 \phi \hat{\phi} + 4\hat{z}) \cdot (\sqrt{3}\hat{\phi}) d\phi \\
&= 2\sqrt{3} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \\
&= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\phi) d\phi \\
&= 2\pi\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Anmärkning: En standardräkning ger $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{2 \cos^2 \phi}{\rho} \hat{z}$, vilket visar att $\nabla \times \mathbf{A}$ är singularärt på z -axeln. Det går därför inte att tillämpa Stokes' Sats på ytan $S : x^2 + y^2 \leq 3, z = 1$ utan att först lägga till en annan kurva som avskärmar singulariteten. Men det innebär att man ändå måste räkna med en direkt parametrisering av en kurva, och det är inte mindre besvärligt än att parametrisera Γ . Att tillämpa Stokes' Sats utan att ta hänsyn till singulariteten är ett principfel—oavsett om man får samma svar som man gör vid en **korrekt** behandling.

4.) Om \mathbf{A} är ett potentialfält då ska $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion Φ i det område där \mathbf{A} är definierat. En potential finns då om $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i detta område. Vi erhåller

$$\nabla \times \mathbf{A} = [2(2 - b)xy + 2(c - 1)xz]\hat{x} + (b - 2)y^2\hat{y} + [6(a - 1)x + (c - 1)z^2]\hat{z}$$

och för att $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i ett område då måste $a = c = 1, b = 2$. För dessa värden har vi

$$\mathbf{A} = (6xy + 2y^2z + yz^2)\hat{x} + (3x^2 + 4xyz + xz^2)\hat{y} + (2xy^2 + 2xyz)\hat{z},$$

och med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ då har vi

$$\Phi'_x = 6xy + 2y^2z + yz^2, \quad \Phi'_y = 3x^2 + 4xyz + xz^2, \quad \Phi'_z = 2xy^2 + 2xyz.$$

Ekvationen $\Phi'_x = 6xy + 2y^2z + yz^2$ ger $\Phi = 3x^2y + 2xy^2z + xyz^2 + g(y, z)$. Insättning av detta i $\Phi'_y = 3x^2 + 4xyz + xz^2$ ger $g'_y(y, z) = 0$ vilket ger att

$$\Phi = 3x^2y + 2xy^2z + xyz^2 + g(z).$$

Insättning i $\Phi'_z = 2xy^2 + 2xyz$ ger $g'(z) = 0$ vilket nu ger att

$$\Phi = 3x^2y + 2xy^2z + xyz^2 + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) Vektorfältet \mathbf{A} är ett potentialfält: $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ med potential $\Phi(\rho, \phi, \phi) = \frac{\sin \phi}{\rho}$ i alla punkter där $\rho \neq 0$. Kurvan Γ har startpunkten i $(1, 0)$ och slutpunkten i $(0, -2/3)$ i xy -planet som har polära koordinater $(\rho, \phi) = (1, 0)$ respektive $(\rho, \phi) = (2/3, 3\pi/2)$. Vi har nu

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(2/3, 3\pi/2) - \Phi(1, 0) = -\frac{3}{2}$$

eftersom Γ ligger i ett enkelt sammanhängande området som inte innehåller origo (där $\rho = 0$).

6.) Parametrisera S genom Ortsvektorn (i cylinder koordinater):

$$\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho \hat{\rho} + (1 - \rho^2) \hat{z}$$

med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. På S har vi (i cylinderkoordinater)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \hat{\rho} + (1 - \rho^2) \rho \hat{z}.$$

Observera att

$$\mathbf{r}'_{\rho} \times \mathbf{r}'_{\phi} = (\hat{\rho} - 2\rho \hat{z}) \times (\rho \hat{\phi}) = 2\rho^2 \hat{\rho} + \rho \hat{z}$$

och att $(\mathbf{r}'_{\rho} \times \mathbf{r}'_{\phi}) \cdot \hat{n} = \rho \geq 0$. Observera att \mathbf{A} är singulärt på z -axeln. Vi definierar $S_{\epsilon} : z = 1 - \rho^2, 0 < \epsilon \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ och $D_{\epsilon} : 0 < \epsilon \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Flödet ut genom S är då

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S_{\epsilon}} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS_{\epsilon}$$

och vi har

$$\begin{aligned}
\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{n} \, dS_\epsilon &= \iint_{D_\epsilon} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi) \, d\rho d\phi \\
&= \iint_{D_\epsilon} \left(\frac{1}{\rho} \hat{\rho} + (1 - \rho^2) \rho \hat{z} \right) \cdot (2\rho^2 \hat{\rho} + \rho \hat{z}) \, d\rho d\phi \\
&= \iint_{D_\epsilon} [2\rho + \rho^2 - \rho^4] \, d\rho d\phi \\
&= 2\pi \int_\epsilon^1 [2\rho + \rho^2 - \rho^4] \, d\rho \\
&= \frac{34\pi}{15} - 2\pi \left(\epsilon^2 + \frac{\epsilon^3}{3} - \frac{\epsilon^5}{5} \right)
\end{aligned}$$

och nu följer att flödet är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{34\pi}{15}.$$