

TATA 44 Vektoranalys. TEN 1.**2012-10-26, kl 08.00–12.00**

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n , $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter.

Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.

Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

1. Beräkna arean av den del av sfären $x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 25$ som ligger innanför konen $2z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = 2xy^2\hat{x} + 3yz^2\hat{y} + zx^2\hat{z}$ ut genom ytan $S : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ med $x, y, z \geq 0$, i riktning $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

3. Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A}(x, y, z) = zy\hat{x} + xz\hat{y} + 2xy\hat{z}$ och Γ är randen till ytan $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ med $x, y, z \geq 0$. Γ genomlöps moturs sett från punkten $(17, 17, 17)$.

4. För vilka värden på konstanterna a, b, c är vektorfältet

$$\mathbf{A} = (4xy + ayz)\hat{x} + (2x^2 + xz + 6byz)\hat{y} + (3y^2 + cxy)\hat{z}$$

ett potentialfält? Beräkna sedan alla potentialer till \mathbf{A} för dessa värden.

5. Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = -\frac{\cos\theta}{r^2}\hat{r} - \frac{\sin\theta}{r^2}\hat{\theta}$ och Γ är skärningskurvan mellan planet $x - y = 0$ och ytan $2x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 12$ med $x, y, z \geq 0$. Kurvan genomlöps moturs sett från punkten $(3, -3, 0)$.

6. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{y} + z\hat{z}$$

genom ytan $S : x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ med $z \geq 0$.

TATA44 Lösningar 26/10/2012.

1.) Lösning 1: Konen $2z = \sqrt{x^2 + y^2}$ skär sfären $x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 25$ då $4z^2 + (z - 5)^2 = 25$ och enkla räkningar ger nu $z^2 - 2z = 0$ som ger $z(z - 2) = 0$ och vi ser att $z = 0$ eller $z = 2$. Observera att punkter på sfären med $z = 2$ ligger under sfärens ekvator, och planet $z = 2$ delar sfären i två delar: $S : x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 25, z \geq 2$ och $S_1 : x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 25, 0 \leq z \leq 2$. Arealen av $S + S_1$ är arean av sfären, som är 100π (arean av en sfär med radie R är $4\pi R^2$) och således är

$$A(S) = 100\pi - A(S_1)$$

där $A(S)$ och $A(S_1)$ betecknar arean av S resp. S_1 . Först beräknar vi $A(S_1)$. Vi parametriserar S_1 med Ortsvektorn i cylinderkoordinater (observera att här har vi $z = 5 - \sqrt{25 - x^2 - y^2}$):

$$\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho \hat{\rho} + (5 - \sqrt{25 - \rho^2}) \hat{z}$$

med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \rho \leq 4, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vidare har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{\rho} \times \mathbf{r}'_{\phi} &= \left(\hat{\rho} + \frac{\rho}{\sqrt{25 - \rho^2}} \hat{z} \right) \times (\rho \hat{\phi}) \\ &= -\frac{\rho^2}{\sqrt{25 - \rho^2}} \hat{\rho} + \rho \hat{z}. \end{aligned}$$

Arealen av S_1 är nu

$$\begin{aligned} A(S_1) &= \iint_{S_1} dS_1 \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_{\rho} \times \mathbf{r}'_{\phi}| d\rho d\phi \\ &= 5 \iint_D \frac{\rho}{\sqrt{25 - \rho^2}} d\rho d\phi \\ &= 10\pi \int_0^4 \frac{\rho}{\sqrt{25 - \rho^2}} d\rho \\ &= 10\pi \left[-\sqrt{25 - \rho^2} \right]_0^4 \\ &= 20\pi. \end{aligned}$$

Av detta följer att den sökta arean $A(S)$ är

$$A(S) = 100\pi - 20\pi = 80\pi.$$

Svar: Den sökta arean är $A(S) = 80\pi$.

Lösning 2: Konen $2z = \sqrt{x^2 + y^2}$ skär sfären $x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 25$ då $4z^2 + (z - 5)^2 = 25$ och enkla räkningar ger nu $z^2 - 2z = 0$ som ger $z(z - 2) = 0$ och vi ser att $z = 0$ eller $z = 2$. Eftersom sfärens radie är 5 då ser vi att ytan S är den del av sfären $x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 25$ för vilken $2 \leq z \leq 10$. Nu sätter vi $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, och på sfären har vi $\rho^2 + (z - 5)^2 = 25$ vilket ger $\rho = \sqrt{10z - z^2}$ (efter lite algebraisk manipulering av uttrycken)-observera att $\rho \geq 0$,

varför vi tar den positiva kvadratroten. I cylinder koordinater parametriserar vi ytan S genom Ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\phi, z) = \sqrt{10z - z^2} \hat{\rho} + z \hat{z}$$

med $(\phi, z) \in D$ där $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi, 2 \leq z \leq 10$. den sökta arean är nu

$$A = \iint_S dS = \iint_D |\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z| d\phi dz.$$

Vi har

$$\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = \sqrt{10z - z^2} \hat{\phi} \times \left(\frac{5 - z}{\sqrt{10z - z^2}} \hat{\rho} + \hat{z} \right) = \sqrt{10z - z^2} \hat{\rho} - (5 - z) \hat{z},$$

och av detta har vi att

$$\begin{aligned} A &= dS = \iint_D |\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z| d\phi dz \\ &= \iint_D \sqrt{25} d\phi dz \\ &= 5 \int_2^{10} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) dz \\ &= 80\pi. \end{aligned}$$

Lösning 3: Konen $2z = \sqrt{x^2 + y^2}$ skär sfären $x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 25$ då $4z^2 + (z - 5)^2 = 25$ och enkla räkningar ger nu $z^2 - 2z = 0$ some ger $z(z - 2) = 0$ och vi ser att $z = 0$ eller $z = 2$. Eftersom sfärens radie är 5 då ser vi att ytan S är den del av sfären $x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 25$ för vilken $2 \leq z \leq 10$. Inför sfäriska koordinater: $x = 5 \cos \phi \sin \theta$, $y = 5 \sin \phi \sin \theta$, $z = 5 + 5 \cos \theta$. Vi vet att $2 \leq z \leq 10$. När $z = 10$ då är $\theta = 0$. När $z = 2$ då är

$$5 + 5 \cos \theta = 2,$$

vilket ger

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}$$

och då är $\theta = \arccos(-3/5)$ då $z = 2$ (kom ihåg att $\theta \in [0, \pi]$ och då är $\pi/2 \leq \arccos(-3/5) \leq \pi$). Sätt nu $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \arccos(-3/5)$. Vi parametriserar S genom Ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = 5 \cos \phi \sin \theta \hat{x} + 5 \sin \phi \sin \theta \hat{y} + (5 + 5 \cos \theta) \hat{z}$$

med $(\theta, \phi) \in D$. Standardräkningar ger

$$\mathbf{r}'_\theta = 5\hat{\theta}, \quad \mathbf{r}'_\phi = 5 \sin \theta \hat{\phi}$$

(se Formelbladet). Vi erhåller nu

$$\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = 25 \sin \theta (\hat{\theta} \times \hat{\phi}) = 25 \sin \theta \hat{r}.$$

Den sökta arean är nu

$$\begin{aligned}
A &= \iint_S dS \\
&= \iint_D |\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi| d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\arccos(-3/5)} \left(\int_0^{2\pi} 25 \sin \theta d\phi \right) d\theta \\
&= 50\pi \int_0^{\arccos(-3/5)} \sin \theta d\theta \\
&= 50\pi [-\cos \theta]_0^{\arccos(-3/5)} \\
&= 50\pi [1 - \cos(\arccos(-3/5))] \\
&= 50\pi \left[1 + \frac{3}{5} \right] \\
&= 80\pi.
\end{aligned}$$

2.) En standardräkning ger att $\nabla \cdot \mathbf{A} = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Lägg till tre sidoytor $S_1 : x^2 + 2y^2 \leq 1, x, y \geq 0, z = 0$; $S_2 : 2y^2 + 3z^2 \leq 1, y, z \geq 0, x = 0$; $S_3 : x^2 + 3z^2 \leq 1, x, z \geq 0, y = 0$. Ytorna $S+S_1+S_2+S_3$ avgränsar en kropp $V : x^2+2y^2+3z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0$. Enhetsnormalerna (ut ur V till S_1, S_2, S_3 är $-\hat{z}, -\hat{x}, -\hat{y}$. Flödet av \mathbf{A} ut ur V genom S_1 är

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 = 0$$

ty $\mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 = -\mathbf{A} \cdot \hat{z} = -zx^2 = 0$ eftersom $z = 0$ på S_1 . Liknande beräkningar på S_2 och S_3 ger att

$$\iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_2 dS_2 = 0, \quad \iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_3 dS_3 = 0.$$

Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1+S_2+S_3} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV,$$

och eftersom flödena ut ur V genom S_1, S_2, S_3 är noll, så erhåller vi att flödet Φ av \mathbf{A} genom S och ut ur V ges genom

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$

Vi har

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iiint_V (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dx dy dz \\
&= [x = r \cos \phi \sin \theta, y = \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \phi \sin \theta, z = \frac{r}{\sqrt{3}} \cos \theta, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq \pi/2] \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} r^4 \sin \theta d\phi \right) d\theta \right) dr \\
&= \frac{\pi}{10\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

3.) Enligt Stokes' Sats så har vi

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{n} dS.$$

En enkel räkning ger att

$$\nabla \times \mathbf{A} = x \hat{x} - y \hat{y}.$$

Parametrisera S med Ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = \hat{r}$$

med $(\theta, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq \pi/2$. En standarräkning ger

$$\mathbf{r}'_{\theta} \times \mathbf{r}'_{\phi} = \sin \theta \hat{r}.$$

Observera att $\hat{r} = \cos \phi \sin \theta \hat{x} + \sin \phi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$ och att på S är $\mathbf{A} = \cos \phi \sin \theta \hat{x} - \sin \phi \sin \theta \hat{y}$. Då har vi att

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint_D (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{r}'_{\theta} \times \mathbf{r}'_{\phi}) d\theta d\phi \\ &= \iint_D (\cos \phi \sin \theta \hat{x} - \sin \phi \sin \theta \hat{y}) \cdot (\sin \theta \hat{r}) d\theta d\phi \\ &= \iint_D \sin^2 \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) d\theta d\phi \quad \text{eftersom } \hat{r} = \cos \phi \sin \theta \hat{x} + \sin \phi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ &= \iint_D \sin^2 \theta \cos 2\phi d\theta d\phi \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos 2\phi d\phi \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

4.) Om \mathbf{A} är ett potentialfält då ska $\mathbf{A} = \nabla \Phi$ för någon funktion Φ i det område där \mathbf{A} är definierat. En potential finns då om $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i detta område. Vi erhåller

$$\nabla \times \mathbf{A} = [(c-1)x + 6(1-b)y]\hat{x} + (a-c)y\hat{y} + (1-a)z\hat{z}$$

och för att $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i ett område då måste $a = c = 1, b = 1$. För dessa värden har vi

$$\mathbf{A} = (4xy + yz)\hat{x} + (2x^2 + xz + 6yz)\hat{y} + (3y^2 + xy)\hat{z},$$

och med $\mathbf{A} = \nabla \Phi$ då har vi

$$\Phi'_x = 4xy + yz, \quad \Phi'_y = 2x^2 + xz + 6yz, \quad \Phi'_z = 3y^2 + xy.$$

Ekvationen $\Phi'_x = 4xy + yz$ ger $\Phi = 2x^2y + xyz + g(y, z)$. Insättning av detta i $\Phi'_y = 2x^2 + xz + 6yz$ ger $g'_y(y, z) = 6yz$ vilket ger $g(y, z) = 3y^2z + h(z)$. Då har vi

$$\Phi = 2x^2y + xyz + 3y^2z + h(z).$$

Insättning i $\Phi'_z = 3y^2 + xy$ ger $h'(z) = 0$ vilket nu ger att

$$\Phi = 2x^2y + xyz + 3y^2z + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) Vektorfältet \mathbf{A} är ett potentialfält: $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ med potential $\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{\cos\theta}{r}$. På kurvan Γ har ändpunkter i $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ i xy -planet och $(0, 0, 2)$ på z -axeln. Startpunkten är $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ som har sfäriska koordinater $(r, \theta, \phi) = (2, \pi/2, \pi/4)$ och slutpunkten är $(0, 0, 2)$ som har sfäriska koordinater $(r, \theta, \phi) = (2, 0, \pi/4)$ och vi har då

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(2, 0, \pi/4) - \Phi(2, \pi/2, \pi/4) = \frac{1}{2}.$$

6.) **Lösning 1:** Parametrisera S genom Ortsvektorn (i cylinder koordinater):

$$\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho \hat{\rho} + \frac{\sqrt{4 - \rho^2}}{2} \hat{z}$$

med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. På S har vi (i cylinderkoordinater)

$$\mathbf{A} = \hat{\phi} + z \hat{z} = \hat{\phi} + \frac{\sqrt{4 - \rho^2}}{2} \hat{z}.$$

Observera att

$$\mathbf{r}'_{\rho} \times \mathbf{r}'_{\phi} = \left(\hat{\rho} - \frac{\rho}{2\sqrt{4 - \rho^2}} \hat{z} \right) \times (\rho \hat{\phi}) = \frac{\rho^2}{2\sqrt{4 - \rho^2}} \hat{\rho} + \rho \hat{z}.$$

Flödet ut genom S är

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_{\rho} \times \mathbf{r}'_{\phi}) d\rho d\phi \\ &= \iint_D \left(\hat{\phi} + \frac{\sqrt{4 - \rho^2}}{2} \hat{z} \right) \cdot \left(\frac{\rho^2}{2\sqrt{4 - \rho^2}} \hat{\rho} + \rho \hat{z} \right) d\rho d\phi \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \rho \sqrt{4 - \rho^2} d\rho d\phi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \rho \sqrt{4 - \rho^2} d\phi \right) d\rho \\ &= \pi \int_0^2 \rho \sqrt{4 - \rho^2} d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{2}{3} (4 - \rho^2)^{3/2} \right]_0^2 \\ &= \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

(Och flödet in genom S är $-8\pi/3$).

Lösning 2: Observera att \mathbf{A} är singulärt på z -axeln. Låt S_ϵ vara ytan $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$, $x^2 + y^2 \geq \epsilon^2$ och lägg till S_ϵ cylindern $C_\epsilon : x^2 + y^2 = \epsilon^2$, $0 \leq z \leq \frac{\sqrt{4 - \epsilon^2}}{2}$ och skivan $S_1 : \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$. Låt V_ϵ vara den kropp som begränsas av ytorna $S_\epsilon + S_1 + C_\epsilon$. Vi definierar nu det sökta flödet som

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS.$$

Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S_\epsilon + S_1 + C_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{V_\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$

eftersom \mathbf{A} är ett C^1 -fält inom V_ϵ och i en omgivning av V_ϵ . Observera att alla normaler pekar **ut ur** V_ϵ .

Integralen $\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS$: här är $\hat{n} = -\hat{z}$ vilket ger att $\mathbf{A} \cdot \hat{n} = -\mathbf{A} \cdot \hat{z} = -z = 0$ eftersom $z = 0$ på S_1 . Således har vi

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = 0.$$

Integralen $\iint_{C_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS$: här parametriserar vi ytan genom Ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi, z) = \epsilon \cos \phi \hat{x} + \epsilon \sin \phi \hat{y} + z \hat{z}$ med $(\phi, z) \in D$ där $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq \sqrt{4 - \epsilon^2}/2$. Vi har då $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = \epsilon \cos \phi \hat{x} + \epsilon \sin \phi \hat{y}$. Då är (observera att \hat{n} pekar in mot z -axeln)

$$\begin{aligned} \iint_{C_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS &= - \iint_D \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z) d\phi dz \\ &= - \iint_D (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} + z \hat{z}) \cdot (\epsilon \cos \phi \hat{x} + \epsilon \sin \phi \hat{y}) d\phi dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

Av detta följer att

$$\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{V_\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$

Inom V_ϵ är $\nabla \cdot \mathbf{A} = 1$ och då är

$$\begin{aligned}
\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS &= \iiint_{V_\epsilon} dV \\
&= \iint_{\epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4} \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}/2} dz \right) dx dy \\
&= \frac{1}{2} \iint_{\epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4} \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy \\
&= [x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, \epsilon \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \frac{1}{2} \int_\epsilon^2 \left(\int_0^{2\pi} \rho \sqrt{4-\rho^2} d\phi \right) d\rho \\
&= \pi \int_\epsilon^2 \rho \sqrt{4-\rho^2} d\rho \\
&= [u = 4 - \rho^2] \\
&= -\frac{\pi}{2} \int_{4-\epsilon^2}^0 u^{1/2} du \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{4-\epsilon^2} u^{1/2} du \\
&= \frac{\pi}{3} [u^{3/2}]_0^{4-\epsilon^2} \\
&= \frac{\pi(4-\epsilon^2)^{3/2}}{3}.
\end{aligned}$$

Nu erhåller vi

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \frac{8\pi}{3}.$$

Observera att \mathbf{A} är singulärt på z -axeln. Om man uttrycker \mathbf{A} i cylinderkoordinater, då erhåller man

$$\mathbf{A} = \hat{\phi} + z \hat{z}$$

som inte ser ut att ha några singulariteter alls. Men det finns ett problem med att definiera $\hat{\phi}$ i punkter på z -axeln eftersom ϕ är inte entydigt definierat i dessa punkter och det är i denna bemärkelse att \mathbf{A} inte är definierat på z -axeln.