LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter Basarab-Horwath

TATA 44 Vektoranalys. TEN 1.
2012-01-12, kl 14.00–18.00

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n, där $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter.
Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.
Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

---

1. Beräkna arean av den del av konenen $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ som ligger innanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A} = (y + z)\,\hat{x} + (x + z)\,\hat{y} + (x + y)\,\hat{z}$$

och Γ är kurvan som är skärningen mellan planet $x+y+z = 0$ och ytan $x^2+y^2+z^2 = 1, \quad z \geq 0$. Γ genomlöps moturs sett från punkten $(1, 1, 0)$.

3. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A} = xz(x^2 + y^2)\hat{x} + yz(x^2 + y^2)\hat{y} - 2z^2(x^2 + y^2)\hat{z}$$

ut genom den del av ytan $x^2 + y^2 + 2z^2 = 3, \quad z \geq 0$ för vilken $x^2 + y^2 \leq 1$. Normalen pekar bort från origo.

4. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A} = \sin^2\theta \sin\phi\,\hat{r} + 2\sin\theta\cos\theta\sin\phi\,\hat{\theta} + \sin\theta\cos\phi\,\hat{\phi}$$

och Γ är kurvan med startpunkt i $(1, 1, 0)$ och slutpunkt i $(0, 1, 1)$ (kartesiska koordinater).

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\,\hat{\rho}$$

och Γ är kurvan $3x^2 + 4y^2 = 12$ i xy-planet. Kurvan genomlöps moturs.

6. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A} = \frac{\cos^2\phi}{\rho}\,\hat{\rho}$$

genom ytan $x^2 + y^2 = z + 1,\ 0 \leq z \leq 3$ och $y \geq 0$. Normalen pekar ut från z-axeln.

TATA44 Lösningar 12/1/2012.

1.) En enkel räkning ger att ytorna skär varandra då $x^2 + y^2 = 4$. Inför cylinderkoordinater. Parametrisera konen $z = 4 - \rho$ där $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\hat{\rho} + (4 - \rho)\hat{z}$. Sätt $D : 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har

$$\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} - \hat{z}) \times (\rho\hat{\phi}) = \rho\hat{\rho} + \rho\hat{\phi}$$

och den sökta arean är

$$\begin{aligned} A &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho d\phi \\ &= \sqrt{2} \iint_D \rho d\rho d\phi \\ &= \sqrt{2} \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \rho d\phi \right) d\rho \\ &= 4\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

2.) Observera att $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ och då är $\mathbf{A}$ ett potentialfält med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ där $\Phi = xy + xz + yz$. Kurvans ändpunkter är $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$ (startpunkt) och $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ (slutpunkt). Vi har nu

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) - \Phi(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = 0.$$

3.) Lösning 1: Observera att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Låt S beteckna den del av ytan $x^2 + y^2 + 2z^2 = 3$ där $z \geq 0$ och $x^2 + y^2 \leq 1$. Lägg till locket $L : x^2 + y^2 \leq 0,\ z = 0$ och cylindern $S_1 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1$ Då är ytan $S + S_1 + L$ sluten. Låt V beteckna den kropp som $S + S_1 + L$ omsluter. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1+L} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = 0,$$

av vilket vi får att

$$\iint_{S+S_1+L} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = -\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n_1} dS_1 - \iint_L \mathbf{A} \cdot \hat{n_L} dS$$

där alla normaler pekar ut ur V. Eftersom $\mathbf{A} = 0$ på L ty $z = 0$ på L, vi har

$$\iint_{S+S_1+L} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = -\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n_1} dS_1.$$

Parametrisera S_1 med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi, z) = (\cos\phi, \sin\phi, z) = \hat{\rho} + z\hat{z}$ med $0 \leq \phi \leq 2\pi$ och $0 \leq z \leq 1$. Vi erhåller $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = \hat{\rho}$ och på S_1 är $\mathbf{A} = z\hat{\rho} - 2z^2\hat{z}$. Med $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 1$ erhåller vi

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 &= \iint_D \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z) d\phi dz \\
&= \iint_D (z\hat{\rho} - 2z^2\hat{z}) \cdot \hat{\rho} d\phi dz \\
&= \iint_D z d\phi dz \\
&= \pi
\end{aligned}$$

och således är flödet ut genom S

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = -\pi.$$

Lösning 2: I cylinderkoordinater kan man skriva

$$\mathbf{A} = \rho^3 z\hat{\rho} - 2z\rho^2\hat{z}$$

och ytan $S : x^2+y^2+2z^2 = 3,\ z \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1$ kan skrivas som $S : \rho^2+2z^2 = 3,\ z \geq 0,\ \rho \leq 1.$ ortsvektorn för punkter på S är då

$$\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\hat{\rho} + \frac{\sqrt{3-\rho^2}}{\sqrt{2}}\hat{z},$$

med parameterområdet $D : 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$, och vi har

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi &= \left(\hat{\rho} - \frac{\rho}{\sqrt{2}\sqrt{3-\rho^2}}\hat{z}\right) \times (\rho\,\hat{\phi}) \\
&= \frac{\rho^2}{\sqrt{2}\sqrt{3-\rho^2}}\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}.
\end{aligned}$$

Observera att $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi$ har positiv $\hat{\rho}$-komponent, vilket betyder att $\hat{n} = \dfrac{\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi}{|\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi|}$ pekar bort från origo. Flödet av $\mathbf{A}$ genom S är då

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n}\, dS \\
&= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi) d\rho d\phi \\
&= \iint_D \left[\rho^3 \frac{\sqrt{3-\rho^2}}{\sqrt{2}}\hat{\rho} - \rho^2(3-\rho^2)\hat{z}\right] \cdot \left[\frac{\rho^2}{\sqrt{2}\sqrt{3-\rho^2}}\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}\right] d\rho d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{3\rho^5}{2} - 3\rho^3\right] d\phi\right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{3\rho^5}{2} - 3\rho^3\right] d\rho \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

4.) Vektorfältet är ett potentialfält med potential $\Phi = r\sin^2\theta\sin\phi + C$. I punkten $(1,1,0)$ är $r = \sqrt{2},\ \theta = \pi/2,\ \phi = \pi/4$ och i $(0,1,1)$ är $r = \sqrt{2},\ \theta = \pi/4,\ \phi = \pi/2$. Således har vi

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \Phi(\sqrt{2},\pi/2,\pi/4) - \Phi(\sqrt{2},\pi/4,\pi/2)\\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

5.) En enkel räkning visar att $\nabla\times\mathbf{A} = 0$ i de punkter där $\rho \neq 0$. Sätt $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 1$ och låt S beteckna området innanför $\Gamma + \Gamma_1$. Enligt Stokes Sats har vi nu

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = 0$$

där Γ_1 genomlöps medurs. Vi har då

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

där Γ_1 nu genomlöps moturs. På Γ_1 är $\rho = 1$ och då är $\mathbf{A} = \hat{\rho}$. Ortsvektorn för punkter på Γ_1 är $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho}$ och vi har

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}\cdot\mathbf{r}'(\phi)d\phi\\ &= \int_0^{2\pi} r\hat{ho}\cdot\hat{\phi}d\phi\\ &= 0.\end{aligned}$$

6.) Parametrisera ytan $S : x^2 + y^2 = z + 1$ genom ortsvektorn (i cylinderkoordinater) $\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\hat{\rho} + (\rho^2 - 1)\hat{z}$. Vi har $0 \leq z \leq 3$ och $y \geq 0$ vilket ger $1 \leq \rho \leq 2$ och $0 \leq \phi \leq \pi$. Sätt nu $D : 1 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq \pi$. En standardräkning ger $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = -2\rho^2\hat{\rho} + \rho\hat{z}$. Flödet är nu (med hänsyn tagen till det faktum att normalen till ytan ska peka bort från z-axeln)

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS &= \iint_D \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_\rho)d\rho d\phi\\ &= \iint_D \frac{\cos^2\phi}{\rho}\hat{\rho}\cdot(2\rho^2\hat{\rho} - \rho\hat{z})d\rho d\phi\\ &= \iint_D 2\rho\cos^2\phi d\rho d\phi\\ &= \int_1^2 \left(\int_0^\pi \rho(1+\cos 2\phi)d\phi\right) d\rho\\ &= \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$