

TATA 44 Vektoranalys. TEN 1.**2011-10-22, kl 08.00–12.00**

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n , $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter.

Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.

Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

1. Beräkna arean av den del av paraboloiden $2z = x^2 + y^2$ som ligger innanför ytan $x^2 + y^2 + 3z^2 = 5$ med $x, y \geq 0$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = x^3\hat{x} + 2y^3\hat{y} + 3z^3\hat{z}$ ut genom ytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ med $z \geq 0$, i riktning $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

3. Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(x, y, z)$ och Γ är skärningen mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planet $x + y + z = 1$. Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$.

4. Beräkna alla möjliga potentialer till vektorfältet

$$\mathbf{A} = (e^x \cos y - yz)\hat{x} - (e^x \sin y + xz)\hat{y} + (z - xy)\hat{z}.$$

Beräkna sedan kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där Γ är skärningen mellan planet $2y + 3z = 0$ och ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$ med $y \geq 0$. Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, -17)$.

5. Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A}(x, y) = \left(-y + \frac{y}{x^2 + y^2}\right)\hat{x} + \left(x - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)\hat{y}$ och Γ är kurvan $3x^2 + 4y^2 = 12$ med $y \geq 0$. Kurvan genomlöps moturs.

6. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

genom cylinderytan $x^2 + y^2 = 4$, $-2 \leq z \leq 2$.

TATA44 Lösningar 22/10/2011.

1.) Ytorna skär varandra då $3z^2 + 2z = 5$, vilket ger $(z - 1)(3z + 5) = 0$. Då är $z = 1$ eftersom $z \geq 0$. Sätt $D : x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$. Parametrisera ytan med hjälp av Ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = \left(x, y, \frac{x^2 + y^2}{2}\right)$ med $(x, y) \in D$. Arean A av ytan $S : 2z = x^2 + y^2$ ges genom

$$A = \iint_S dS = \iint_D |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| dx dy$$

En enkel räkning ger $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-x, -y, 1)$ av vilket det följer att

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy \\ &= \left[x = r \cos \phi, y = r \sin \phi; 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \phi \leq \pi/2 \right] \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + r^2} d\phi \right) dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{1 + r^2} dr \\ &= \left[t = 1 + r^2 \right] \\ &= \frac{\pi}{6} \int_1^3 t^{1/2} dt \\ &= \frac{\pi}{6} [3\sqrt{3} - 1]. \end{aligned}$$

2.) **Lösning 1:** Ytan är $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ och villkoret $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$ gäller för $S : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ med $z > 0$. Sätt $S_1 : x^2 + 2y^2 \leq 1, z = 0$ och låt V beteckna kroppen som $S + S_1$ omsluter. Ytan $S + S_1$ är sluten och vektorfältet är C^1 . Enligt Gauss' Sats gäller att flödet ut ur V ges (enligt Gauss' Sats) genom

$$\begin{aligned} \iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \\ &= 3 \iiint (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dx dy dz \\ &= \left[x = r \sin \theta \cos \phi, y = \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \theta \sin \phi, z = \frac{r}{\sqrt{3}} \cos \theta, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2 \right] \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} r^4 \sin \theta d\theta \right) d\phi \right) dr \\ &= \frac{\pi \sqrt{6}}{5}. \end{aligned}$$

Observera att

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS + \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1$$

där $\hat{n}_1 = -\hat{z}$. En enkel räkning ger att $\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 = 0$ eftersom $z = 0$ på S_1 , och vi erhåller

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \frac{\pi\sqrt{6}}{5}.$$

Lösning 2: Inför parametreringen av ytan $S : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ genom Ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta, \phi) = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \hat{z}$ med $(\theta, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Då har vi (efter lite arbete) att

$$\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \theta \left[\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sqrt{2} \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \sqrt{3} \cos \theta \hat{z} \right]$$

och på S har vi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) = \sin^3 \theta \cos^3 \phi \hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^3 \theta \sin^3 \phi \hat{y} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos^3 \theta \hat{z}.$$

Det sökta flödet är nu

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi) d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_D [\sin^5 \theta (\cos^4 \phi + \sin^4 \phi) + \sin \theta \cos^4 \theta] d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Observera att

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 \theta d\theta = \frac{8}{15}, \quad \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{5}.$$

Vi får nu

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{8}{15} (\cos^4 \phi + \sin^4 \phi) + \frac{1}{5} \right] d\phi \\ &= [\cos^4 \phi + \sin^4 \phi = (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)^2 - 2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\phi = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\phi] \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{5} + \frac{2}{15} \cos 4\phi \right] d\phi \\ &= \frac{\sqrt{6}\pi}{5}. \end{aligned}$$

Detta lösningssätt rekommenderas inte.

3.) Lösning 1: Parametrisera kurvan med Ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi, 1 - \cos \phi - \sin \phi)$.

Vi har då

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (\cos \phi, \sin \phi, 1 - \cos \phi - \sin \phi) \cdot (-\sin \phi, \cos \phi, \sin \phi - \cos \phi) d\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} [\sin \phi - \cos \phi + \cos^2 \phi - \sin^2 \phi] d\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} [\sin \phi - \cos \phi + \cos 2\phi] d\phi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Lösning 2: Man kan skriva vektorfältet \mathbf{A} som

$$\mathbf{A} = \nabla(\sqrt{1+x^2+y^2}) + \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \hat{z}.$$

Eftersom kurvan Γ är sluten (den är skärningen mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planet $x + y + z = 1$) då är $\int_{\Gamma} \nabla(\sqrt{1+x^2+y^2}) \cdot d\mathbf{r} = 0$ och vi har då att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \hat{z} \cdot d\mathbf{r}.$$

På Γ är $x^2 + y^2 = 1$ och $z = 1 - x - y$. Parametrisera kurvan som ovan med Ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi, 1 - \cos \phi - \sin \phi)$. Vi har då

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma} \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \hat{z} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \phi - \sin \phi) \hat{z} \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \phi - \sin \phi)(\sin \phi - \cos \phi) d\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} [\sin \phi - \cos \phi + \cos 2\phi] d\phi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

4.) Om $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ då ger de sedvanliga räkningar att varje potential Φ har formen

$$\Phi = e^x \cos y - xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Planet $2y + 3z = 0$ innehåller x -axeln och skär $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$ på x -axeln i punkterna $(-3, 0, 0)$ och $(3, 0, 0)$. Dessa punkter är kurvans start- och slutpunkter, och då erhåller vi att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(3, 0, 0) - \Phi(-3, 0, 0) = e^3 - e^{-3} = 2 \cosh 3.$$

5.) **Lösning 1:** Vi har $\mathbf{A} = P(x, y)\hat{x} + Q(x, y)\hat{y}$ med

$$P(x, y) = -y + \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = x - \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

En enkel räkning ger

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$$

i alla punkter där $x^2 + y^2 \neq 0$. Lägg till Γ kurvan $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 4, y \leq 0$, som är en halvcirkel med radie 2 och centrum i $(0, 0)$. Både Γ och Γ_1 börjar i $(2, 0)$ och slutar i $(-2, 0)$, och γ_1 ligger över Γ . Låt D beteckna området under Γ_1 och ovanför Γ . Om kurvan $\Gamma_1 + \Gamma$ genomlöps moturs (så att D ligger till vänster om omlöpsriktningen) då har vi, enligt Greens formel, att

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 2 \iint_D dx dy$$

eftersom \mathbf{A} inte har några singulariteter inom D (eller på dess rand). Således erhåller vi att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 2 \iint_D dx dy - \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där Γ genomlöps medurs medan Γ_1 genomlöps moturs. Av detta följer att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - 2 \iint_D dx dy$$

där både Γ och Γ_1 genomlöps moturs.

Vi parametriserar Γ_1 genom Ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = 2 \cos \phi \hat{x} + 2 \sin \phi \hat{y}$ med $\phi : 0 \rightarrow \pi$. På Γ_1 är

$$\mathbf{A} = -\frac{3}{2} \sin \phi \hat{x} + \frac{3}{2} \cos \phi \hat{y}.$$

Vidare har vi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\pi \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\ &= \int_0^\pi \left(-\frac{3}{2} \sin \phi \hat{x} + \frac{3}{2} \cos \phi \hat{y} \right) \cdot (-2 \sin \phi \hat{x} + 2 \cos \phi \hat{y}) d\phi \\ &= \int_0^\pi (3 \sin^2 \phi + 3 \cos^2 \phi) d\phi \\ &= \int_0^\pi 3 d\phi \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

Integralen $\iint_D dx dy$ är arean av D och vi har

$$\iint_D dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} dx dy - \iint_{3x^2 + 4y^2 \leq 12} dx dy = 2\pi - \sqrt{3}\pi$$

och vi erhåller nu att

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= 3\pi - 2(2\pi - \sqrt{3}\pi) \\ &= 2\sqrt{3}\pi - \pi \\ &= \pi(2\sqrt{3} - 1).\end{aligned}$$

Lösning 2: Vektorfältet $\mathbf{A}(x, y)$ kan skrivas som summan $\mathbf{A}(x, y) = \mathbf{A}_1(x, y) + \mathbf{A}_2(x, y)$ där $\mathbf{A}_1(x, y) = -y\hat{x} + x\hat{y}$ och $\mathbf{A}_2(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}\hat{x} - \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{y}$.

Vi har då

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r}.$$

För att beräkna $\int_{\Gamma} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r}$ lägg till kurvan $\Gamma_1 : y = 0, -2 \leq x \leq 2$. Enligt Greens formel gäller nu

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = 2 \iint_D dx dy$$

där D är området $3x^2 + 4y^2 \leq 12, y \geq 0$. En enkel räkning ger att $2 \iint_D dx dy = 2\sqrt{3}\pi$. Vidare är $\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = 0$ och då är

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

För att beräkna $\int_{\Gamma} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r}$ lägg till kurvorna $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ där $\Gamma_2 : y = 0, -2 \leq x \leq -1$; $\Gamma_3 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$; $\Gamma_4 : y = 0, 1 \leq x \leq 2$. Kurvan $\Gamma + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ är nu sluten och området E som denna kurva omsluter är enkelt sammanhängande och \mathbf{A}_2 är C^1 på kurvan och inom E . Enligt Greens formel erhåller vi (efter en enkel räkning) att

$$\int_{\Gamma+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Vidare har vi

$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_4} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Således erhåller vi att

$$\int_{\Gamma+\Gamma_3} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = 0$$

av vilket vi får nu

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_3} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r}$$

där bägge kurvorna genomlöps moturs. På Γ_3 är $\mathbf{A}_2(x, y) = y\hat{x} - x\hat{y}$ ty $x^2 + y^2 = 1$. Parametrisera Γ_3 med Ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi), 0 \leq \phi \leq \pi$. Vi har

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_3} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\pi \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\
&= \int_0^\pi (\sin \phi, -\cos \phi) \cdot (-\sin \phi, \cos \phi) d\phi \\
&= - \int_0^\pi d\phi \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

Av detta följer att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \pi[2\sqrt{3} - 1].$$

6.) Lösning 1: Vektorfältet är singularärt i $(0, 0, 0)$. Lägg till ytorna $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ samt $L_1 : x^2 + y^2 \leq 4, z = 2$ och $L_2 : x^2 + y^2 \leq 4, z = -2$. Låt V beteckna kroppen som avgränsas av dessa ytor. Inom V är $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ och enligt Gauss Sats gäller nu

$$\iint_{S+S_1+L_1+L_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = 0$$

där normalerna till alla delytorna pekar ut ur V . På L_1 har vi att normalen $\hat{n} = \hat{z}$ och på L_2 är normalen $\hat{n} = -\hat{z}$. Vi får då att bidraget från $L_1 + L_2$ är

$$\begin{aligned}
\iint_{L_1+L_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \frac{4}{(x^2+y^2+4)^{3/2}} dx dy \\
&= [x = r \cos \phi, y = r \sin \phi, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= 4 \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{r}{(4+r^2)^{3/2}} d\phi \right) dr \\
&= 8\pi \int_0^2 \frac{r}{(4+r^2)^{3/2}} dr \\
&= [t = 4+r^2] \\
&= 4\pi \int_4^8 \frac{dt}{t^{3/2}} \\
&= 4\pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right].
\end{aligned}$$

På S_1 är $\mathbf{A} = (x, y, z) = \mathbf{r}$ med $|\mathbf{r}| = 1$ ty S_1 är enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Bidraget från S_1 är

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS_1 &= - \iint_{S_1} dS_1 \\
&= -4\pi
\end{aligned}$$

eftersom $\hat{n}_1 = -\mathbf{r}$ för S_1 ty \hat{n}_1 pekar in mot origo. Vi har nu att

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS_1 + \iint_{L_1+L_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = 0$$

som ger

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - 4\pi + 4\pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = 0$$

av vilket det följer att

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 2\sqrt{2}\pi.$$

Lösning 2: Vi kan parametrisera ytan $S : x^2 + y^2 = 4, -2 \leq z \leq 2$ med Ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi, z) = 2\hat{\rho} + z\hat{z}$ i cylinderkoordinater, med $(\phi, z) \in D$ där $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi, -2 \leq z \leq 2$. Observera att $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = 2\hat{\phi} \times \hat{z} = 2\hat{\rho}$ och att $\mathbf{A} = \frac{2}{(4+z^2)^{3/2}}\hat{\rho} + \frac{z}{(4+z^2)^{3/2}}\hat{z}$ på S . Flödet ut ur S är nu

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi, z)) \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z) d\phi dz \\ &= \iint_D \frac{4}{(4+z^2)^{3/2}} d\phi dz \\ &= 8\pi \int_{-2}^2 \frac{1}{(4+z^2)^{3/2}} dz \\ &= 16\pi \int_0^2 \frac{1}{(4+z^2)^{3/2}} dz \\ &= 2\pi \int_0^2 \frac{1}{(1+(\frac{z}{2})^2)^{3/2}} dz \\ &= [t = z/2] \\ &= 4\pi \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} dt \\ &= [t = \tan w, 0 \leq w \leq \pi/4, dt = (1 + \tan^2 w)dw] \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/4} \cos w dw \\ &= 4\pi [\sin w]_0^{\pi/4} \\ &= 2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$