

TATA 44 Vektoranalys. TEN 1.**2011-01-13, kl 14.00–18.00**

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n , $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter.

Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.

Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

1. Beräkna arean av den del av paraboloiden $z = 2 - x^2 - y^2$ som ligger innanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A} = (y^2 + z^2)\hat{x} + (x^2 + z^2)\hat{y} + (x^2 + y^2)\hat{z}$ och Γ är randen till ytstycket $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x, y, z \geq 0$. Γ genomlöps moturs sett från $(17, 17, 17)$.

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = yz\hat{x} + xz\hat{y} + xy\hat{z}$ genom ytan $x + 2y + 3z = 6$, $x, y, z \geq 0$ i riktningen som ges genom $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

4. Bestäm en potential för vektorfältet

$$\mathbf{A} = \frac{(1 - \rho^2)z^2 \cos^2 \phi}{(1 + \rho^2)^2} \hat{\rho} - \frac{z^2 \sin 2\phi}{1 + \rho^2} \hat{\phi} + \frac{2z\rho \cos^2 \phi}{1 + \rho^2} \hat{z}$$

och beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där Γ är skärningskurvan mellan planet $x + y + z = 3$ och konen $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ med $x \geq 0$ och Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$.

5. Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där $\mathbf{A} = \left[-y + \frac{3x}{(3x^2 + y^2)^{1/2}} \right] \hat{x} + \left[x + \frac{y}{(3x^2 + y^2)^{1/2}} \right] \hat{y}$ och Γ är kurvan $x^2 + y^2 = 9$ i planet. Γ genomlöps moturs.

6. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A} = \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

ut ur ytan $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 16$.

TATA 44 Vector analysis. TEN 1.**2010-10-23, 08.00–12.00**

Each question is marked 0, 1, 2 or 3 points. An answer to a question is deemed to be good if it obtains at least 2 points. In order to obtain grade n , $n = 3, 4, 5$, on the exam you need $3n - 1$ points and n good answers.

You are allowed to use the formula sheet *Formelbladet i vektoranalys*. No calculators are allowed.

The solutions to the examination will be posted on the course homepage after the examination.

1. Calculate the area of that part of the paraboloid $z = 2 - x^2 - y^2$ which is inside the cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Calculate the line integral $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ where $\mathbf{A} = (y^2 + z^2)\hat{x} + (x^2 + z^2)\hat{y} + (x^2 + y^2)\hat{z}$ and Γ is the boundary of the surface $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x, y, z \geq 0$. Γ is traversed anti-clockwise as seen from $(17, 17, 17)$.

3. Calculate the flow of the vector field $\mathbf{A} = yz\hat{x} + xz\hat{y} + xy\hat{z}$ through the surface $x + 2y + 3z = 6$, $x, y, z \geq 0$ in the direction which satisfies the condition $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

4. Determine a potential for the vector field

$$\mathbf{A} = \frac{(1 - \rho^2)z^2 \cos^2 \phi}{(1 + \rho^2)^2} \hat{\rho} - \frac{z^2 \sin 2\phi}{1 + \rho^2} \hat{\phi} + \frac{2z\rho \cos^2 \phi}{1 + \rho^2} \hat{z}$$

and calculate the line integral $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ where Γ is the intersection of the plane $x + y + z = 3$ and the cone $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ with $x \geq 0$ and Γ is traversed anti-clockwise as seen from $(0, 0, 17)$.

5. Calculate the line integral

$$I = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

where $\mathbf{A} = \left[-y + \frac{3x}{(3x^2 + y^2)^{1/2}} \right] \hat{x} + \left[x + \frac{y}{(3x^2 + y^2)^{1/2}} \right] \hat{y}$ and Γ is the curve $x^2 + y^2 = 9$ in the plane. Γ is traversed anti-clockwise.

6. Calculate the flow of the vector field

$$\mathbf{A} = \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

outwards through the surface $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 16$.

TATA44 ösningar till tentamen 13/01/2011.

1.) Paraboloiden $z = 2 - x^2 - y^2$ skär konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ då $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x^2 - y^2$. Med $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ då är $\rho^2 + \rho - 2 = 0$ vilket ger $(\rho + 2)(\rho - 1) = 0$. Således är $\rho = 1$ ty $\rho \geq 0$. Vi betecknar den del av paraboloiden som ligger innanför konen med S , och S parametriseras av Ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 2 - x^2 - y^2)$ där $(x, y) \in D$ och $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Den sökta arean är nu

$$\begin{aligned} A &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= [x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4\rho^2} d\phi \right) d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho \\ &= [u = 1 + 4\rho^2] \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^5 u^{1/2} du \\ &= \frac{\pi}{6} [5\sqrt{5} - 1]. \end{aligned}$$

2.) En enkel räkning ger $\nabla \times \mathbf{A} = (2(y - z), 2(z - x), 2(x - y))$. Enligt Stokes' Sats gäller

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS$$

där S betecknar ytstycket $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x, y, z \geq 0$. Observera att i vårt fall är $\hat{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}}{3}$ eftersom S är en del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Vi har nu

$$\nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{n} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(y - z) \\ 2(z - x) \\ 2(x - y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

och då erhåller vi

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

3.) **Lösning 1:** Låt S_1, S_2, S_3 beteckna följande ytor: $S_1 : z = 0, x + 2y \leq 6, x, y \geq 0$, $S_2 : y = 0, x + 3z \leq 6, x, z \geq 0$, och $S_3 : x = 0, 2y + 3z \leq 6, y, z \geq 0$. Låt V vara den kropp som $S : x + 2y + 3z = 6$ samt S_1, S_2, S_3 omsluter ($x, y, z \geq 0$). Enligt Gauss' Sats gäller

$$\iint_{S+S_1+S_2+S_3} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = 0$$

ty $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. I denna ytintegral pekar \hat{n} ut ur V . Således har vi

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 + \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_2 dS_2 + \iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_3 dS_3$$

där $\hat{n}_1 = \hat{z}$, $\hat{n}_2 = \hat{y}$, $\hat{n}_3 = \hat{x}$. Vidare har vi

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 &= \iint_{x+2y \leq 6, x, y \geq 0} (0, 0, xy) \cdot (0, 0, 1) dx dy \\ &= \int_0^3 \left(\int_0^{6-2y} xy dx \right) dy \\ &= \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_2 dS_2 &= \iint_{x+3z \leq 6, x, z \geq 0} (0, xz, 0) \cdot (0, 1, 0) dx dz \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{6-3z} xz dx \right) dz \\ &= 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_3 dS_3 &= \iint_{2y+3z \leq 6, y, z \geq 0} (yz, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) dy dz \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{3-\frac{3z}{2}} yz dy \right) dz \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Slutligen erhåller vi

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = 21.$$

Lösning 2: Parametrisera ytan $S : x + 2y + 3z = 6$ med Ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 2 - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3})$ där $(x, y) \in D : x + 2y \leq 6, x, y \geq 0$. Då har vi

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) dx dy \\
&= \iint_D \left(2y - \frac{xy}{3} - \frac{2y^2}{3}, 2x - \frac{x^2}{3} - \frac{2xy}{3}, xy \right) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right) dx dy \\
&= \frac{2}{9} \int_0^3 \left(\int_0^{6-2y} [6x + 3y - x^2 - y^2 + 2xy] dx \right) dy \\
&= \frac{2}{9} \int_0^3 \left[3x^2 + 3xy - \frac{x^3}{3} - xy^2 + x^2y \right]_{x=0}^{x=6-2y} dy \\
&= \frac{2}{9} \int_0^3 \left[36 + 54y - 48y^2 + \frac{26y^3}{3} \right] dy \\
&= \frac{2}{9} \left[36y + 27y^2 - 16y^3 + \frac{13y^4}{6} \right]_0^3 \\
&= 21.
\end{aligned}$$

4.) I cylinder koordinater har vi

$$\mathbf{A} = \nabla \Phi(\rho, \phi, z)$$

av vilket det följer att

$$\Phi'_\rho = \frac{(1 - \rho^2)z^2 \cos^2 \phi}{(1 + \rho^2)^2}, \quad \Phi'_\phi = -\rho \frac{z^2 \sin 2\phi}{1 + \rho^2}, \quad \Phi'_z = \frac{2z\rho \cos^2 \phi}{1 + \rho^2}.$$

Ekvationen $\Phi'_z = \frac{2z\rho \cos^2 \phi}{1 + \rho^2}$ ger $\Phi = \frac{z^2 \rho \cos^2 \phi}{1 + \rho^2} + g(\rho, \phi)$. Insättning av detta uttryck i $\Phi'_\phi = -\rho \frac{z^2 \sin 2\phi}{1 + \rho^2}$ ger $g'_\phi(\rho, \phi) = 0$ och då är $\Phi = \frac{z^2 \rho \cos^2 \phi}{1 + \rho^2} + g(\rho)$. Insättning av detta i $\Phi'_\rho = \frac{(1 - \rho^2)z^2 \cos^2 \phi}{(1 + \rho^2)^2}$ ger $g'_\rho = 0$ och då erhåller vi att

$$\Phi = \frac{z^2 \rho \cos^2 \phi}{1 + \rho^2} + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Kurvan Γ är skärningen mellan $x + y + z = 3$ och $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ med $x \geq 0$ och således ligger ändpunkterna i planet $x = 0$: startpunkten P motsvarar $\phi = -\pi/2$ och slutpunkten Q svara mot $\phi = \pi/2$. Eftersom $\mathbf{A} = \nabla \Phi$ då är

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(Q) - \Phi(P) = 0$$

ty $\phi = -\pi/2$ i P och $\phi = \pi/2$ i Q .

5.) Vektorftäet \mathbf{A} är summan av två vektorfält: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ där

$$\mathbf{A}_1 = -y\hat{x} + x\hat{y}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{3x}{(3x^2 + y^2)^{1/2}}\hat{x} + \frac{y}{(3x^2 + y^2)^{1/2}}\hat{y}.$$

Vi har

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_\Gamma \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r}.$$

Vi har enligt Greens Sats

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} 2dx dy = 18\pi.$$

För att behandla \mathbf{A}_2 låt Γ_1 vara kurvan $3x^2 + y^2 = 9$ (som ligger innanför Γ) och beteckna med D_1 området mellan Γ och Γ_1 . Enligt Greens Sats har vi då att

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \iint_{D_1} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{(3x^2 + y^2)^{1/2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3x}{(3x^2 + y^2)^{1/2}} \right) \right] dx dy = 0$$

av vilket det följer att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r}$$

där både Γ och Γ_1 genomlöps medurs. Parametrisera Γ_1 med Ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \sqrt{3} \cos \phi \hat{x} + 3 \sin \phi \hat{y}$ med $\phi : 0 \rightarrow 2\pi$. Vi har då $\mathbf{A}_2(\mathbf{r}(\phi)) = \sqrt{3} \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$ och kurvintegralen är nu

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_2(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \sin \phi \\ 3 \cos \phi \end{bmatrix} d\phi \\ &= 0. \end{aligned}$$

och vi erhåller

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 18\pi.$$

6.) Lösning 1: Vektorfältet är singulärt i $(0, 0, 0)$. I rymdpolära koordinater har vi

$$\mathbf{A} = \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}.$$

Vi har då

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (-\sin \theta) = 0$$

för $r \neq 0$. Sätt $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och låt V beteckna kroppen mellan S_1 och paraboloiden $x^2 + 4y^2 + 6z^2 = 9$. Enligt Gauss' Sats har vi då att

$$\iint_{x^2+4y^2+9z^2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS + \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = 0$$

där normalerna \hat{n} och \hat{n}_1 pekar ut ur V . Vi kan då skriva det sköta flödet som

$$\Phi = \iint_{x^2+4y^2+9z^2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1$$

där \hat{n}_1 nu pekar ut ur sfären S_1 . Vi har $dS_1 = \sin \theta d\theta d\phi$ med $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ och $\hat{n}_1 = \hat{r}$. På S_1 är $\mathbf{A} = -\hat{r}$ (se ovan) och således har vi

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi (-\hat{r} \cdot \hat{r} \sin \theta d\theta) \right) d\phi \\
&= -2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\
&= -4\pi.
\end{aligned}$$

Lösning 2: Vi kan skriva

$$\mathbf{A} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

där $\mathbf{r} = (x, y, z)$ och $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Sätt $S : x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 16$ och $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Enligt Gauss' Sats gäller att

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$

där V är området mellan S_1 och S och \hat{n} pekar ut ur V . En enkel räkning ger $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ och i synnerhet inom V . Således har vi

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1$$

där \hat{n} pekar ut ur S_1 bort från origo. På S_1 är $r = 1$ och $\hat{n}_1 = \hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ ty S_1 är en sfär. Då erhåller vi att

$$\mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -1/r^2 = -1,$$

och då är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = - \iint_{S_1} dS_1 = -4\pi$$

ty arean av en sfär med radie R är $4\pi R^2$.