

TATA 44 Vektoranalys/ TEN 1.
2010-08-27, kl 8.00–12.00

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n , $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter.

Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.

Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

1. Beräkna arean av det ystykke S som definieras genom Ortsvektorn $\mathbf{r}(s, t) = (s \cos t, s \sin t, s^2)$ med $0 \leq s \leq t$, $0 \leq t \leq 1$. Motivera nogga.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = (x^2 + y^2)\hat{\mathbf{x}} + (y^2 + z^2)\hat{\mathbf{y}} + (x^2 + y^2)\hat{\mathbf{z}}$ genom konen $S : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ med $z \geq 0$ och $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} > 0$ där $\hat{\mathbf{n}}$ är enhetsnormalen till S .

3. Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A} = xz\hat{\mathbf{x}} + (xy^2 + 2z)\hat{\mathbf{y}} + (xy + z)\hat{\mathbf{z}}$ och Γ är kurvan $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ med $\Gamma_1 : x = 0, y^2 + z^2 = 1, z > 0, y : -1 \rightarrow 1$; $\Gamma_2 : z = 0, x + y = 1, y : 1 \rightarrow 0$; $\Gamma_3 : z = 0, x - y = 1, y : 0 \rightarrow -1$.

4. För vilka konstanter a, b är vektorfältet $\mathbf{A} = (axy + z^2)\hat{\mathbf{x}} + 2x^2\hat{\mathbf{y}} + (3z^2 + bxz)\hat{\mathbf{z}}$ ett potentialfält? Beräkna för dessa värden integralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där Γ är en godtycklig kurva med startpunkt i $(0, 0, 0)$ och ändpunkt i $(1, 1, 0)$.

5. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{y}}$ genom ytan $S : x^2 + y^2 = z + 1, 0 \leq z \leq 1$ så att $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} > 0$ där $\hat{\mathbf{n}}$ är enhetsnormalen till S . Motivera nogga.

6. Γ är skärningskurvan mellan planet $z = 2$ och den elliptiska cylindern $x^2 + 4y^2 = 4$. Beräkna $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ med $\mathbf{A} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{y}}$. Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 39)$. Motivera nogga.

TATA44 Lösningar till tentamen 27/08/2010.

1.) Arealen A av ytstycket S ges av formeln

$$A = \iint_D |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| ds dt$$

där $D : 0 \leq s \leq t, 0 \leq t \leq 1$. En enkel räkning ger $\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = (-2s^2 \cos t, -2s^2 \sin t, s)$ av vilket det följer att

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{s^2 + 4s^4} ds dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^t s \sqrt{1 + 4s^2} ds \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^t s \sqrt{1 + 4s^2} ds \right) dt \\ &= \frac{1}{12} \int_0^1 [(1 + 4t^2)^{3/2} - 1] dt \end{aligned} \tag{1}$$

där det sista steget fås genom variabelbytet $u = 1 + 4s^2$. Integralen

$$\int_0^1 (1 + 4t^2)^{3/2} dt$$

behandlas med Hermites Rotansats. Vi har

$$\int_0^1 (1 + 4t^2)^{3/2} dt = \int_0^1 \frac{(1 + 4t^2)^2}{\sqrt{4t^2 + 1}} dt$$

och vi sätter

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 + 4t^2)^2}{\sqrt{4t^2 + 1}} dt &= \int \frac{16t^4 + 8t^2 + 1}{\sqrt{4t^2 + 1}} dt \\ &= (At^3 + Bt^2 + Ct + D)\sqrt{4t^2 + 1} + \int \frac{K}{\sqrt{4t^2 + 1}} dt \end{aligned}$$

enligt Hermites Rotansats. Derivering i V.L. och H.L. ger

$$\frac{16t^4 + 8t^2 + 1}{\sqrt{4t^2 + 1}} = (3At^2 + 2Bt + C)\sqrt{4t^2 + 1} + \frac{4t(At^3 + Bt^2 + Ct + D)}{\sqrt{4t^2 + 1}} + \frac{K}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

av vilket det följer att

$$16t^4 + 8t^2 + 1 = (3At^2 + 2Bt + C)(4t^2 + 1) + 4t(At^3 + Bt^2 + Ct + D) + K$$

som ger

$$16t^4 + 8t^2 + 1 = 16At^4 + 12Bt^3 + (3A + 8C)t^2 + (2B + 4D)t + C + K$$

och vi får $A = 1, B = D = 0, C = 5/8, K = 3/8$. Då är

$$\int \frac{(1+4t^2)^2}{\sqrt{4t^2+1}} dt = (t^3 + \frac{5t}{8})\sqrt{4t^2+1} + \frac{3}{8} \int \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}} dt.$$

Integralen $\int \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}} dt$ beräknas så här:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}} dt = [w = 2t] = \int \frac{1}{2\sqrt{w^2+1}} dw = \frac{1}{2} \ln[w + \sqrt{w^2+1}] + L,$$

där det sista steget är en standardintegral (Persson och Böiers) och L är en konstant. Vi får då

$$\int \frac{(1+4t^2)^2}{\sqrt{4t^2+1}} dt = (t^3 + \frac{5t}{8})\sqrt{4t^2+1} + \frac{3}{16} \int \ln[2t + \sqrt{4t^2+1}] + L$$

och då är

$$\int_0^1 \frac{(1+4t^2)^2}{\sqrt{4t^2+1}} dt = \frac{13}{8}\sqrt{5} + \frac{3}{16} \ln[2 + \sqrt{5}]$$

och vi får

$$A = \frac{13}{96}\sqrt{5} + \frac{1}{48} \ln[2 + \sqrt{5}] - \frac{1}{12}.$$

2.) Lösning 1: Lägg till ytan $S_1 : x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$ med enhetsnormal $\hat{\mathbf{n}}_1$. Då är ytan $S + S_1$ sluten och om V betecknar området som omsluts av S och S_1 så har vi, enligt Gauss' Sats,

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$

Här pekar enhetsnormalerna $\hat{\mathbf{n}}$ och $\hat{\mathbf{n}}_1$ ut ur kroppen V , enligt förutsättningarna i Gauss' Sats. En enkel undersökning visar att villkoret $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} > 0$ gör att $\hat{\mathbf{n}}$ pekar ut ur kroppen V .

En enkel räkning ger $\nabla \cdot \mathbf{A} = 2(x+y)$ och vi får

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= 2 \iint_{0 \leq x^2+y^2 \leq 4} \left(\int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}} (x+y) dz \right) dx dy \\ &= 2 \iint_{0 \leq x^2+y^2 \leq 4} [2 - \sqrt{x^2+y^2}](x+y) dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

efter ett variablebyte till polära koordinater $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$, med $0 \leq r \leq 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi$, och en sedvanlig integration. Då har vi att flödet Φ ges genom

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1.$$

Vi vet att $\hat{\mathbf{n}}_1$ pekar i negativ z -riktning och då pekar $-\hat{\mathbf{n}}_1$ pekar i positiv z -riktning. Således har vi

$$\Phi = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{z}} dS_1 = \iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS_1.$$

S_1 är cirkelskivan $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ och en enkel räkning med plana polära koordinater ger

$$\Phi = 8\pi.$$

Lösning 2: Det går (med ihärdig räkning) att beräkna flödet utan Gauss' Sats. Flödet definieras av integralen

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

Ortsvektorn för punkter på S är $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2})$ med $D : x^2 + y^2 \leq 4$ eftersom vi ska ha $z \geq 0$. En enkel räkning ger $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$ och vi har $\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) = 1 > 0$.

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ &= \iint_D \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) dx dy \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \left(x\sqrt{x^2 + y^2} + y[\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 4] + x^2 + y^2 \right) dx dy. \end{aligned}$$

Byt till polära koordinater: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ och vi erhåller

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\phi} [r^3 \cos \phi + (r^3 - 4r^2 + 4r) \sin \phi + r^3 \sin^3 \phi + r^3] d\phi \right) dr \\ &= 2\pi \int_0^2 r^3 dr \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

OBS: Här har vi använt oss av det faktum att $\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin^3 \phi d\phi = 0$.

3.) Vi har

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

För Γ_1 sätter vi $y = \cos \theta$, $z = \sin \theta$ med $\theta : \pi \rightarrow 0$ så att $y : -1 \rightarrow 1$. Ortsvektorn för Γ_1 är $\mathbf{r}(\theta) = (0, \cos \theta, \sin \theta)$ och vi har då

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\pi}^0 (0, 2 \sin \theta, \sin \theta) \cdot \mathbf{r}'(\theta) d\theta \\ &= \int_{\pi}^0 (0, 2 \sin \theta, \sin \theta) \cdot (0, -\sin \theta, \cos \theta) d\theta \\ &= \int_{\pi}^0 [\cos \theta \sin \theta - 2 \sin^2 \theta] d\theta \\ &= \int_{\pi}^0 [\cos 2\theta - 1] d\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$

För Γ_2 är Ortsvektorn $\mathbf{r}(y) = (1 - y, y, 0)$ och $y : 1 \rightarrow 0$ vilket ger att

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^0 (0, y^2(1 - y), y(1 - y)) \cdot \mathbf{r}'(y) dy \\ &= \int_1^0 (0, y^2(1 - y), y(1 - y)) \cdot (-1, 1, 0) dy \\ &= \int_1^0 y^2(1 - y) dy \\ &= -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

För Γ_3 är Ortsvektorn $\mathbf{r}(y) = (1 + y, y, 0)$ och $y : 0 \rightarrow -1$ vilket ger att

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{-1} (0, y^2(1 + y), y(1 + y)) \cdot \mathbf{r}'(y) dy \\ &= \int_0^{-1} (0, y^2(1 + y), y(1 + y)) \cdot (1, 1, 0) dy \\ &= \int_0^{-1} y^2(1 + y) dy \\ &= -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Vi erhåller

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \pi - \frac{1}{6}.$$

4.) Med $\mathbf{A} = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$, där $f(x, y, z) = axy + z^2$, $g(x, y, z) = 2x^2$, $h(x, y, z) = 3z^2 + bxz$, villkoren för att \mathbf{A} är ett potentialfält är att $f'_y = g'_x$, $f'_z = h'_x$, $g'_z = h'_y$. (Det går även att använda kriteriet $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i det här fallet, men denna metod är speciell för tre dimensioner eftersom kryssprodukten är inte väldefinierad för andra dimensioner.) Detta ger ekvationerna $4x = ax$, $2z = bz$ som ska gälla för (x, y, z) i ett enkelt sammanhängande område. Då har vi $a = 4$, $b = 2$. Nu söker vi en funktion $\Phi(x, y, z)$ sådan att

$$\Phi'_x = 4xy + z^2, \quad \Phi'_y = 2x^2, \quad \Phi'_z = 3z^2 + 2xz.$$

Om vi integrerar $\Phi'_y = 2x^2$ så erhåller vi $\Phi(x, y, z) = 2x^2y + K(x, z)$. Insättning av denna ekvation i $\Phi'_x = 4xy + z^2$ ger $K'_x = z^2$ av vilket det följer att $K'_x = z^2$ och vi får $K(x, z) = xz^2 + L(z)$, som i sin tur ger $\Phi(x, y, z) = 2x^2y + xz^2 + L(z)$. Insättning av den sistnämnda ekvationen i $\Phi'_z = 3z^2 + 2xz$ ger $L'(z) = 3z^2$ och då är $L(z) = z^3 + C$ med C en godtycklig konstant. Således har vi

$$\Phi(x, y, z) = 2x^2y + xz^2 + z^3 + C.$$

Integralen

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(1, 1, 0) - \Phi(0, 0, 0)$$

eftersom \mathbf{A} är ett potentialfält med potential $\Phi(x, y, z) = 2x^2y + xz^2 + z^3 + C$ och kurvintegralen är därmed oberoende av vägen mellan kurvans ändpunkter. Vi erhåller

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 2.$$

5.) Ortsvektorn för punkter på ytan S är $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 - 1)$ och vektorn $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-2x, -2y, 1)$ är en normalvektor till S . Vidare har vi $\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) = 1 > 0$. Sätt $D : (x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$. Flödet av vektorfältet är

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ &= \iint_D \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) dx dy \\ &= \iint_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 2} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, 0 \right) \cdot (-2x, -2y, 1) dx dy \\ &= -2 \iint_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 2} dx dy \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

6.) Vektorfältet \mathbf{A} är singulärt på z -axeln. I övriga punkter får vi $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Välj en sluten kurva $C : x^2 + y^2 = 1, z = 0$ som är inom området där $x^2 + y^2 \neq 0$ och då utgör Γ och C randen till en yta S inom området $x^2 + y^2 \neq 0$ (rita en figur). Enligt Stokes' Sats gäller

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

eftersom $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Observera att Γ och C genomlöps så att S är alltid till vänster om den riktning i vilken kurvan genomlöps. På C är $\mathbf{A} = (-y, x, 0)$ och vi parametriserar C genom att sätta $x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = 0$ med $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Ortsvektorn för C är $\mathbf{r}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$. Eftersom Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 39)$ så genomlöps C medurs sett från samma punkt, och då har vi $\theta : 2\pi \rightarrow 0$, som ger nu

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_{2\pi}^0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$