

**TATA 44 Vektoranalys/ TEN 1.**  
**2010-01-15, kl 14.00–18.00**

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget  $n$ ,  $n = 3, 4, 5$ , krävs  $3n - 1$  poäng och  $n$  godkända uppgifter.

Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.

Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

---

1) Beräkna kurvintegralen  $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  där  $\mathbf{A} = y\hat{x} - x\hat{y} + z\hat{z}$  och  $\Gamma$  är skärningskurvan mellan planet  $x + y + z = 1$  och cylindern  $x^2 + y^2 = 1$ .  $\Gamma$  genomlöps moturs sett från  $(0, 0, 1)$

2) Bestäm en potential till vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (2x + z) \cos(x^2 + xz)\hat{x} - (z + 1) \sin(y + yz)\hat{y} + [x \cos(x^2 + xz) - y \sin(y + yz)]\hat{z}$$

och beräkna kurvintegralen  $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  där  $\Gamma$  är kurvan  $\mathbf{r}(t) = t^3\hat{x} + t^2\hat{y} + (\pi t - \sin \frac{\pi t}{2})\hat{z}$  med  $t : 0 \rightarrow 1$ .

3) Beräkna

$$\int_{\Gamma} (3x^2 + 4y)dx + (y^4 + 3y^2 + x)dy$$

där  $\Gamma$  är kurvan  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y \geq 0$ .  $\Gamma$  genomlöps moturs.

4) Beräkna flödet av vektorfältet  $\mathbf{A} = x\hat{x} - 2y\hat{y} + z\hat{z}$  genom ytan  $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $y \geq 0$ .

5) Beräkna flödet av vektorfältet  $\mathbf{A} = x\hat{x} + y\hat{y} - 2z\hat{z}$  ut ur den del av ytan  $2z = x^2 + y^2$  som uppfyller  $x^2 + y^2 + z^2 < 3$ .

6) Beräkna flödet av vektorfältet  $\mathbf{A} = \frac{x}{r^3}\hat{x} + \frac{y}{r^3}\hat{y} + \frac{z}{r^3}\hat{z}$  ut ur ytan  $5x^2 + 10y^2 + 15z^2 = 100$  där  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

TATA44 Lösningar till tentamen 15/01/2010.

1.) **Lösning 1:** Enligt Stokes' Sats är

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS,$$

där  $S$  är den del av planet  $x + y + z = 1$  innanför cylindern  $x^2 + y^2 = 1$ , och  $\hat{\mathbf{n}}$  är en enhetsnormal till  $S$  då  $\Gamma$  genomlöps moturs (sett från punkten  $(0, 0, 17)$ ). En parametrisering av  $S$  är  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$  med  $(x, y) \in D$  och  $D : x^2 + y^2 \leq 1$ . Vi har nu

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ &= \iint_D (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) dx dy \\ &= \iint_D (0, 0, -2) \cdot (1, 1, 1) dx dy \\ &= -2 \iint_D dx dy \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

**Lösning 2:** Parametrisera kurvan  $\Gamma$  genom att sätta  $x = \cos \phi$ ,  $y = \sin \phi$  och  $z = 1 - \cos \phi - \sin \phi$  med  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Ortsvektorn för punkter på  $\Gamma$  är nu  $\mathbf{r}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi, 1 - \cos \phi - \sin \phi)$ . Vi har då  $\mathbf{A} = (\sin \phi, -\cos \phi, 2 - 2(\cos \phi + \sin \phi))$  och

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} [-1 + 2(\sin \phi - \cos \phi) + 2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)] d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} [-1 + 2(\sin \phi - \cos \phi) + 2 \cos 2\phi] d\phi \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

2.) Låt  $\Phi(x, y, z)$  vara en potential till  $\mathbf{A}$ , då är  $\mathbf{A} = \nabla\Phi$  och detta ger oss ekvationssystemet

$$\Phi'_x = (2x + z) \cos(x^2 + xz) \quad (1)$$

$$\Phi'_y = -(z + 1) \sin(y + yz) \quad (2)$$

$$\Phi'_z = x \cos(x^2 + xz) - y \sin(y + yz) \quad (3).$$

ekvation (1) ger  $\Phi = \sin(x^2 + xz) + g(y, z)$ . Insättning av detta i ekvation (2) ger  $g'_y(y, z) = -(z+1) \sin(y+yz)$  som ger  $g(x, y) = \cos(y+yz) + h(z)$ . Då är  $\Phi = \sin(x^2+xz) + \cos(y+yz) + h(z)$ , vilket ger, efter insättning i ekvation (3), att  $h'(z) = 0$ . Således har vi

$$\Phi = \sin(x^2 + xz) + \cos(y + yz) + C$$

där  $C$  är en godtycklig konstant. Vi kan välja  $C = 0$ . Eftersom  $\mathbf{A}$  är ett potentialfält så är

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{r}(1)) - \Phi(\mathbf{r}(0)).$$

Vi har  $\mathbf{r}(1) = (1, 1, \pi - 1)$  och  $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$  vilket ger

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(1, 1, \pi - 1) - \Phi(0, 0, 0) = -2.$$

**3.) Lösning 1:** Låt  $\Gamma_1$  vara kurvan  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $y = 0$  som genomlöps i riktningen  $x : -1 \rightarrow 1$ . Sätt  $D : x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $y \geq 0$ . Enligt Greens formel har vi då

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} (3x^2 + 4y)dx + (y^4 + 3y^2 + x)dy = \iint_D (-3)dxdy = -\frac{3\pi}{2}.$$

Således är

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (3x^2 + 4y)dx + (y^4 + 3y^2 + x)dy &= - \int_{\Gamma_1} (3x^2 + 4y)dx + (y^4 + 3y^2 + x)dy - \frac{3\pi}{2} \\ &= - \int_{-1}^1 3x^2 dx - \frac{3\pi}{2} \\ &= -2 - \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

**Lösning 2:** Man kan parametrisera kurvan  $\Gamma$  genom att sätta  $x = \cos \phi$ ,  $y = \sin \phi$  med  $\phi : 0 \rightarrow \pi$ , och vi får

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (3x^2 + 4y)dx + (y^4 + 3y^2 + x)dy &= \int_0^{\pi} [-(3 \cos^2 \phi + 4 \sin \phi) \sin \phi + (\sin^4 \phi + 3 \sin^2 \phi + \cos \phi) \cos \phi] d\phi \\ &= \int_0^{\pi} [-3 \cos^2 \phi \sin \phi + \sin^4 \phi \cos \phi + 3 \sin^2 \phi \cos \phi + 1 - 5 \sin^2 \phi] d\phi \\ &= [\cos^3 \phi]_0^{\pi} + \left[ \frac{\sin^5 \phi}{5} \right]_0^{\pi} + [\sin^3 \phi]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \left( -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \cos 2\phi \right) d\phi \\ &= -2 - \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

**4.) Lösning 1:** Observera att  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  i alla punkter. Låt  $S$  vara ytan  $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $y \geq 0$  och  $S_1$  vara ytan  $(x - 1)^2 + z^2 \leq 1$ ,  $y = 0$ .  $S + S_1$  omsluter halvsfären  $V : (x - 1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $y \geq 0$ . Enligt Gauss' Sats gäller nu att

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = 0,$$

där  $\hat{\mathbf{n}}$  är en enhetsnormalvektor som pekar ut ur  $V$ . Av detta erhåller vi att

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1$$

där  $\hat{\mathbf{n}}_1$  är en enhetsnormalvektor som pekar i samma riktning som den positiva  $y$ -axeln.

Vi parametriserar  $S_1$  med  $\mathbf{r}(x, z) = (x, 0, z)$  där  $(x, z) \in D$  och  $D : (x - 1)^2 + z^2 \leq 1$ . Nu har vi

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS &= \iint_D \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_z) dx dz \\ &= \iint_D (x, 0, z) \cdot (0, 1, 0) dx dz = 0.\end{aligned}$$

Således är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0.$$

**Lösning 2:** Vi parametriserar ytan  $S : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0$  genom Ortsvektorn för punkter på ytan:  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (1 + \cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$  med  $0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Då erhåller vi

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi) d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos \phi \sin \theta, -2 \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \cdot (\cos \phi \sin^2 \theta, \sin \phi \sin^2 \theta, \cos \theta \sin \theta) d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos \phi \sin^2 \theta + \sin^3 \theta [\cos^2 \phi - 2 \sin^2 \phi] + \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta d\phi \\ &= 0\end{aligned}$$

(efter lite ihärdigt räknande).

**5.) Lösning 1:** Låt  $S$  vara ytan  $2z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 < 3$ . Ytan  $2z = x^2 + y^2$  skär ytan  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  då  $2z + z^2 = 3$ , vilket ger  $(z+1)^2 = 4$  och således är  $z = -1 \pm 2$ . Men  $2z = x^2 + y^2 \geq 0$  och detta medför att  $z = 1$ . Alltså: ytorna skär varandra längs kurvan  $x^2 + y^2 = 2, z = 1$ . Låt  $S_1$  vara ytan  $x^2 + y^2 \leq 2, z = 1$  och  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$  och  $V = \{(x, y, z) : 2z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$ . Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = 0,$$

eftersom  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , och då är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1$$

där  $\hat{\mathbf{n}}_1$  är en enhetsnormalvektor som pekar i samma riktning som den positiva  $z$ -axeln. Om vi parametriserar  $S_1$  med  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1)$  med  $(x, y) \in D$  då har vi

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 &= - \iint_D \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) dx dy \\ &= - \iint_D (x, y, -2) \cdot (0, 0, 1) dx dy \\ &= 2 \iint_D dx dy = 4\pi.\end{aligned}$$

**Lösning 2:** Som ovan, låt  $S$  vara ytan  $2z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 < 3$ . Ytan  $2z = x^2 + y^2$  skär ytan  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  då  $2z + z^2 = 3$ , vilket ger  $(z+1)^2 = 4$  och således är  $z = -1 \pm 2$ . Men  $2z = x^2 + y^2 \geq 0$  och detta medför att  $z = 1$ . Alltså: ytorna skär varandra längs kurvan

$x^2 + y^2 = 2$ ,  $z = 1$ . Låt  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$ . Vi parametriserar  $S$  med Ortsvektorn  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \frac{x^2 + y^2}{2})$  med  $(x, y) \in D$ . Normalen till ytan ska peka ut ur ytan (ut ur den kropp som ytan samt cirkeln  $x^2 + y^2 = 2$ ,  $z = 1$  omsluter) och då har vi  $\hat{n} \cdot \hat{z} < 0$ . Observera att  $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-x, -y, 1)$  och vi väljer  $\hat{n} = -\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y / |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y|$ . Vi har då

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= - \iint_D \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) \, dx dy \\ &= \iint_D (x, y, -(x^2 + y^2)) \cdot (x, y, -1) \, dx dy \\ &= 2 \iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy \\ &= [\text{inför polära koordinater } x = r \cos \phi, y = r \sin \phi] \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r^3 \, dr d\phi \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

6.) Vektorfältet  $\mathbf{A}$  är singulärt i  $(0, 0, 0)$ . För  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  är  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Låt  $S$  beteckna den givna ytan  $5x^2 + 10y^2 + 15z^2 = 100$ , låt  $S_1$  beteckna ytan  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  och låt  $V$  beteckna kroppen mellan ytorna  $S$  och  $S_1$ . Enligt Gauss' Sats gäller

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = 0,$$

av vilket vi får att

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS_1$$

där  $\hat{\mathbf{n}}_1$  är en enhetsnormalvektor som pekar ut ur  $S_1$ , bort från origo. På  $S_1$  är  $r = 1$  och då är  $\hat{\mathbf{n}}_1 = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}$ . Således har vi

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= \iint_{x^2+y^2+z^2=1} (x, y, z) \cdot (x, y, z) \, dS_1 \\ &= \iint_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2 + y^2 + z^2) \, dS_1 \\ &= \iint_{x^2+y^2+z^2=1} dS_1 = 4\pi \end{aligned}$$

ty arean av enhetssfären är  $4\pi$ .