Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2019-06-03 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla funktioner $z(x, y)$ som uppfyller ekvationssystemet
$$\begin{aligned} z'_x &= y^2 \mathrm{e}^x + 1, \\ z'_y &= 2y\mathrm{e}^x - 2, \end{aligned}$$
samt bivillkoret $z(0, y) = y^2 - 2y + 4$.

2. Beräkna $\displaystyle\iint_D (3y - 2x)(2x - y)\,dxdy$, där D är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(2, 4)$ och $(3, 2)$.

3. Bestäm alla konstanter A sådana att $x - 2y + 2z = A$ blir ett tangentplan till ytan $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 16$.

4. Avgör om funktionen f har en lokal extrempunkt i origo om
   (a) $f(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 + z^3$, (1p)
   (b) $f(x, y) = 1 + x^2 + 2y^2 + \sin(xy)$. (2p)

5. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av funktionen $f(x, y) = xy$ då $x^2 + 2xy + 4y^2 \leq 3$ och $y \leq x$.

6. Beräkna
$$\iiint_D y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)^2}\,dxdydz$$
där området D ges av olikheterna $x > 0$, $y < 0$ och $z < 0$.

7. Bestäm funktionalmatrisen till
$$(x, y, z) = \bar{f}(u, v) = (u^2 + v^2, u^2 - v^2, \sin(u + v))$$
i punkten $(u, v) = (\pi, 0)$. Bestäm även ekvationer för tangentplanet till parameterytan $(x, y, z) = \bar{f}(u, v)$ i punkten $\bar{f}(\pi, 0)$ på parameter- och normalform.

Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2019-06-03

1. Från den första ekvationen $z'_x = y^2\mathrm{e}^x + 1$ får vi $z = y^2\mathrm{e}^x + x + k(y)$. Derivation med avseende på y och användande av den andra ekvationen $z'_y = 2y\mathrm{e}^x - 2$ ger $2y\mathrm{e}^x + k'(y) = 2y\mathrm{e}^x - 2$, så att $k'(y) = -2$, och därmed $k(y) = -2y + c$. Det vill säga $z(x, y) = y^2\mathrm{e}^x + x - 2y + c$.

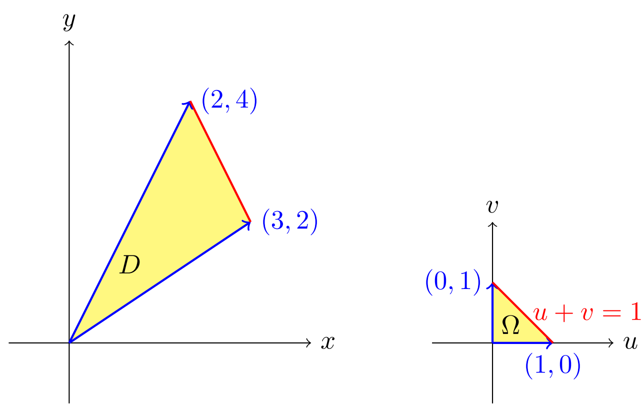
   Bivillkoret ger nu $z(0, y) = y^2 - 2y + c = y^2 - 2y + 4$, d.v.s. $c = 4$.

   Svar: $z(x, y) = y^2\mathrm{e}^x + x - 2y + 4$.

2. Vi gör variabelbytet

$$\begin{cases} x = 3u + 2v \\ y = 2u + 4v \end{cases}$$

   Notera att detta är ett inverterbart linjärt variabelbyte, och $(u, v) = (1, 0)$ ger $(x, y) = (3, 2)$, $(u, v) = (0, 1)$ ger $(x, y) = (2, 4)$. Alltså avbildas triangeln Ω i uv-planet på vår triangel D i xy-planet enligt nedanstående figur:



$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8, \text{ så } dxdy = 8dudv.$$

   Vidare har vi $2x - y = 2(3u + 2v) - (2u + 4v) = 4u$ och $3y - 2x = 3(2u + 4v) - 2(3u + 2v) = 8v$.

$$\iint_D (3y - 2x)(2x - y)\, dxdy = \iint_\Omega 8v \cdot 4u \cdot 8\, dudv$$
$$= 32 \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} 8uvdv \right) du = 32 \int_0^1 \left[4uv^2\right]_{v=0}^{1-u} du = 32 \int_0^1 4u(1-u)^2 du$$
$$= 32 \int_0^1 (4u - 8u^2 + 4u^3) du = 32 \left[2u^2 - \frac{8u^3}{3} + u^4\right]_0^1 = \frac{32}{3}.$$

   *) Ett alternativ, som i detta fall blir lite jobbigare, är att dela upp integralen i två delar:

$$\int_0^2 \left(\int_{2x/3}^{2x} (3y - 2x)(2x - y)dy \right) dx + \int_2^3 \left(\int_{2x/3}^{-2x+8} (3y - 2x)(2x - y)dy \right) dx =$$
$$\ldots = \frac{128}{27} + \frac{160}{27} = \frac{32}{3}.$$

   Svar: $32/3$.

3. Ytan kan skrivas som nivåytan $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 16$. För en tangeringspunkt (a,b,c) gäller $\nabla F(a,b,c) = (2a, 4b, 8c) \parallel (1,-2,2)$, vilket ger $b = -a$ och $c = a/2$, som insatt i ytans ekvation ger $16 = F(a,b,c) = 4a^2$, d.v.s. $a = \pm 2$. De två tangeringspunkterna är alltså $(a,b,c) = \pm(2,-2,1)$, och därmed blir $A = a - 2b + 2c = \pm 8$.

   Svar: $A = \pm 8$.

4. (a) Eftersom $f(0,0,z) = 1 + z^3$ uppfyller att $f(0,0,z) < f(0,0,0)$ om $z < 0$ men $f(0,0,z) > f(0,0,0)$ om $z > 0$ så har f ingen extrempunkt i origo.

   Svar: Origo är inte en extrempunkt till f.

   (b) Vi använder att $\sin t = t + \mathcal{O}(t^3)$ med $t = xy$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + x^2 + 2y^2 + \sin(xy) = 1 + x^2 + y^2 + (xy + \mathcal{O}((xy)^3) \\ &= 1 + x^2 + xy + 2y^2 + \mathcal{O}(|(x,y)|^6). \end{aligned}$$

   Vi ser alltså att $\nabla f(0,0) = 0$, så det är en stationär punkt, och den kvadratiska formen uppfyller

$$x^2 + xy + 2y^2 = (x + y/2)^2 + \frac{7y^2}{4}.$$

   Alltså är den positivt definit, så punkten är en lokal minpunkt.

   (Man kan även skriva

$$x^2 + xy + 2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

   och beräkna egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 1/4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

   Eftersom båda dessa är positiva är den kvadratiska formen positivt definit.)

   Svar: Origo är ett lokalt minimum till f.

5. De två bivillkoren $g(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2 \leq 3$ och $h(x,y) = x - y \geq 0$ bestämmer en sluten delmängd av en ellipsskiva – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y) = xy$ är ett polynom, alltså kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (y,x)$, $\nabla g = (2x+2y, 2x+8y)$ och $\nabla h = (1,-1)$. Kandidatjakt:

   - dim 2 (inre punkter, $g < 3$, $h > 0$): $\nabla f = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$, men $h(0,0) = 0 \not> 0$. Ingen kandidat här.
   - dim 1, består av två delar:
     - ☐ (ellipskurvan $g = 3$, $h > 0$):

$$\nabla f \parallel \nabla g \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x_2y & 2x+8y \end{vmatrix} = 8y^2 - 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2y$$

       Fallet $x = 2y$ insatt i $g = 3$ ger $y^2 = 1/4$ och kandidaten $f(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ (den andra punkten man får, $(-1, -\frac{1}{2})$, uppfyller ej kravet $h > 0$).

       Fallet $x = -2y$ ger analogt $y^2 = 3/4$ och kandidaten $f(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = -3/2$ (den andra punkten man får, $(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, uppfyller ej kravet $h > 0$).
     - ☐ (sträckan $g < 3$, $h = 0$): $\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow (y,x) \parallel (1,-1) \Leftrightarrow y = -x$, som insatt i $h = 0$ och kontrollerad mot $g < 3$ ger kandidaten $f(0,0) = 0$.
   - dim 0 (hörn, $g = 3, h = 0$): Ekvationssystemet $g = 3$, $h = 0$ ger genast $7x^2 = 3$ och $y = x$, alltså kandidaterna $f(\sqrt{\frac{3}{7}}, \sqrt{\frac{3}{7}}) = f(-\sqrt{\frac{3}{7}}, -\sqrt{\frac{3}{7}}) = \frac{3}{7}$.

   Svar: $f_{\max} = f(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f_{\min} = f(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3}{2}$.

6. Vi använder sfäriska (rymdpolära) koordinater. Vi vet att xy-planet ges av att $\theta = \pi/2$, och området $x > 0, y < 0$ ges av att $-\pi/2 < \varphi < 0$.

   Alltså ges området D av att $-\pi/2 < \varphi < 0$, $\pi/2 < \theta < \pi$ och $r > 0$.

   Integranden är negativ på hela integrationsområdet och integralen är endast generaliserad i oändligheten. Alltså räcker det att kolla på en uttömmande följd, och vi tömmer ut D med områdena D_R som ges av att $-\pi/2 < \varphi < 0$, $\pi/2 < \theta < \pi$ och $0 < r < R$.

$$\iiint_{D_R} y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)^2}\,dxdydz = \int_{-\pi/2}^{0}\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_0^R r\sin\theta\sin\varphi\cdot\mathrm{e}^{-r^4}\cdot r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\right)d\varphi$$
$$= \int_{-\pi/2}^{0}\sin\varphi\,d\varphi\cdot\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta\cdot\int_0^R r^3\mathrm{e}^{-r^4}\,dr$$
$$= [-\cos\varphi]_{-\pi/2}^{0}\cdot\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{\pi/2}^{\pi}\cdot\left[\frac{-\mathrm{e}^{-r^4}}{4}\right]_0^R = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{-\mathrm{e}^{-R^4}}{4}\right)\to-\frac{\pi}{16}\text{ då }R\to\infty.$$

   Svar: Integralen är konvergent med värdet $-\pi/16$.

7. Om vi använder matrisnotation gäller

$$\overline{f}(u,v) = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2+v^2\\ u^2-v^2\\ \sin(u+v)\end{pmatrix}.$$

   Funktionalmatrisen ges av

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\\ z'_u & z'_v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 2v\\ 2u & -2v\\ \cos(u+v) & \cos(u+v)\end{pmatrix},$$

   så

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}(\pi,0) = \begin{pmatrix} 2\pi & 0\\ 2\pi & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

   Eftersom

$$\overline{f}(\pi,0) = \begin{pmatrix} \pi^2\\ \pi^2\\ 0\end{pmatrix}$$

   ges tangentplan på parameterform av

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^2\\ \pi^2\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\pi & 0\\ 2\pi & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix},\quad h,k\in\mathbb{R},$$

   eller ekvivalent

$$(x,y,z) = (\pi^2,\pi^2,0) + h(2\pi,2\pi,-1) + k(0,0,-1),\quad h,k\in\mathbb{R}.$$

   (Notera att $\overline{f}(\pi+h,0+k) = \overline{f}(\pi,0) + \frac{\partial\overline{f}}{\partial(u,v)}(\pi,0)\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix}$ + restterm, så tangentplanet ges av att ta bort resttermen i detta uttryck.) För att få en normalvektor kan vi kryssa tangentvektorerna:

$$(2\pi,2\pi,-1)\times(0,0,-1) = (-2\pi,2\pi,0) = -2\pi(1,-1,0).$$

   Så tangentplanet ges på normalform av

$$(1,-1,0)\cdot((x,y,z)-(\pi^2,\pi^2,0)) = 0 \Leftrightarrow x-y=0.$$

Svar: Funktionalmatris: $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}(\pi,0) = \begin{pmatrix} 2\pi & 0 \\ 2\pi & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Tangentplan på parameterform:

$$(x, y, z) = (\pi^2, \pi^2, 0) + h(2\pi, 2\pi, -1) + k(0, 0, -1), \quad h, k \in \mathbb{R}.$$

Tangentplan på normalform: $x - y = 0$.