Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2019-01-09 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla funktioner $f(x, y, z)$ som uppfyller

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= 2xze^z - y, \\ f'_z(x,y,z) &= x^2e^z + zx^2e^z + ze^y, \\ f(1,y,0) &= y. \end{aligned}$$

2. Beräkna

$$\iiint_D \frac{yz}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$$

   där D ges av $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9$, $0 \le x \le y$ och $z \ge 0$.

3. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av $3 + x - x^2 - y^2$ då $2x^2 + y^2 \le 1$ och $x \le 0$.

4. Bestäm alla tangentplan till ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ som är parallella med planet $3x - 2y + 2z = 0$.

5. Beräkna

$$\iint_D x\,dxdy, \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \le 2 \text{ och } y \le x \le 1\big\}.$$

6. Avgör om

$$f(x,y) = 4(\cos x + \cos y) + \frac{1}{1-(x-y)^2}$$

   har ett lokalt maximum eller minimum i origo.

7. Ekvationen $x^7 + x = 2$ har exakt en reell lösning, $x = 1$. så blir lösningen $x(\varepsilon)$ en $\mathcal{C}^1$-funktion av ε, för ε nära noll. Ange $x(0)$ och $x'(0)$, och bestäm med hjälp av detta en approximation till lösningen av ekvationen $x^7 + \frac{101}{100}x = 2$.

Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2019-01-09

1. Integration av den första ekvationen $f'_x(x,y,z) = 2xze^z - y$ ger $f(x,y,z) = x^2ze^z - xy + g(y,z)$. Insättning av detta i den andra ekvationen $f'_z(x,y,z) = x^2e^z + zx^2e^z + ze^y$ ger $x^2(e^z + ze^z) + g'_z(y,z) = x^2e^z + zx^2e^z + ze^y$, dvs. $g'_z(y,z) = ze^y$. Integration av detta ger $g(y,z) = \frac{1}{2}z^2e^y + h(y)$. Därmed vet vi att

$$f(x,y,z) = x^2ze^z - xy + \tfrac{1}{2}z^2e^y + h(y).$$

Det sista villkoret $f(1,y,0) = y$ ger nu $0 - y + 0 + h(y) = y$, alltså $h(y) = 2y$.

Svar: $f(x,y,z) = x^2ze^z - xy + \frac{1}{2}z^2e^y + 2y$.

2. Rymdpolära koordinater ger

$$\begin{aligned} &\iiint_D \frac{yz}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz \\ &= \iiint\limits_{\substack{1\le r\le 3 \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}} \frac{r\sin\varphi\sin\theta\cdot r\cos\theta}{r^2}\, r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi \\ &= \Big[\tfrac{1}{3}r^3\Big]_1^3 \Big[\tfrac{1}{3}\sin^3\theta\Big]_0^{\pi/2} \Big[-\cos\varphi\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{26}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Svar: $13\sqrt{2}/9$.

3. De två bivillkoren $g(x,y) = 2x^2 + y^2 \le 1$ och $h(x,y) = x \le 0$ bestämmer en sluten (fylld) halvellips – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y) = 3 + x - x^2 - y^2$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

Vi får $\nabla f = (1-2x, -2y)$, $\nabla g = (4x, 2y)$ och $\nabla h = (1,0)$. Kandidatjakt:

- Kandidater i ytan $g < 1$, $h < 0$ finns där $\nabla f = 0$, d.v.s. där $(x,y) = (\frac{1}{2}, 0)$, som dock ligger utanför mängden. Ingen kandidat här.
- Kandidater på ellipskurvan $g = 1$, $h < 0$ finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. där

$$0 = \begin{vmatrix} 1-2x & -2y \\ 4x & 2y \end{vmatrix} = (1+2x)2y,$$

alltså där $x = -\frac{1}{2}$ eller $y = 0$. Insättning av $x = -\frac{1}{2}$ i $g = 1$ ger $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, som efter kontroll mot $h < 0$ ger kandidaterna $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{7}{4}$. Insättning av $y = 0$ i $g = 1$ ger efter kontroll mot $h < 0$ kandidaten $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{2})$.
- Kandidater på sträckan $h = 0$, $g < 1$ finns där $\nabla f \parallel \nabla h$, d.v.s. där $y = 0$, som med $h = 0$ och efter kontroll mot $g < 1$ ger kandidaten $f(0,0) = 3$.
- Hörnpunkterna $g = 1$, $h = 0$ ger kandidaterna $f(0,1) = f(0,-1) = 2$.

Notera slutligen att $\frac{1}{2}(5 - \sqrt{2}) > \frac{1}{2}(5 - \frac{3}{2}) = \frac{7}{4}$.

Svar: $f_{\max} = f(0,0) = 3$, $f_{\min} = f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{7}{4}$.

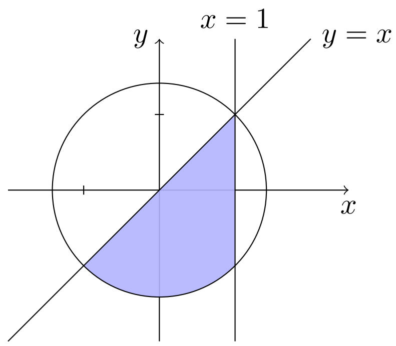
4. Svaret måste uppenbart ha formen $3x-2y+2z=D$. Kalla den sökta tangeringspunkten för (a,b,c); när vi har hittat den kan vi sedan beräkna $D=3a-2b+2c$. Ytans normalvektor i den punkten ska vara parallell med normalvektorn för det givna planet $3x-2y+2z=0$:

$$\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ -2c \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbf{R}.$$

Punkten måste också uppfylla ytans ekvation, $a^2+b^2-c^2=1$. Insättning av $a=3k$, $b=-2k$, $c=-2k$ i detta ger $(9+4-4)k^2=1$, dvs. $k=\pm\frac{1}{3}$. Alltså är $(a,b,c)=\pm(1,-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$, vilket ger $D=\pm(3+\frac{4}{3}-\frac{4}{3})=\pm 3$.

Svar: Det finns två sådana tangentplan, $3x-2y+2z=\pm 3$.

5. Området D ser ut såhär (cirkeln har radien $\sqrt{2}$, linjen $y=x$ skär den i punkterna $\pm(1,1)$):



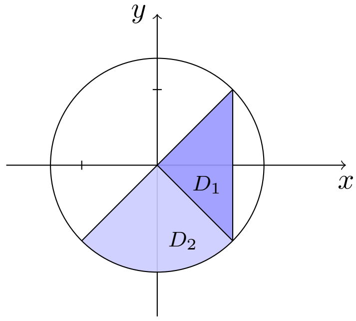
Vi kan alltså direkt räkna ut integralen i kartesiska koordinater:

$$\begin{aligned}
\iint_D x\,dxdy &= \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{x} x\,dy \right) dx \\
&= \int_{x=-1}^{1} \left(x^2 - x\sqrt{2-x^2} \right) dx \\
&= \left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}(2-x^2)^{3/2} \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(Här behöver man egentligen inte ens räkna ut primitiv funktion till $x\sqrt{2-x^2}$; det är ju en udda funktion, så $\int_{-1}^{1} x\sqrt{2-x^2}\,dx$ måste bli noll.)

Alternativ lösning: Med uppdelning i delområden D_1 och D_2 enligt figuren nedan blir $\iint_{D_2} x\,dxdy = 0$ av symmetriskäl, vilket ger

$$\iint_D x\,dxdy = \iint_{D_1} x\,dxdy = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=-x}^{x} x\,dy \right) dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$



Svar: 2/3.

6. Vi beräknar först att f har en stationär punkt med kvadratisk form $Q(h,k) = -2(h-k)^2$ i origo. Denna är negativt semi-definit, och ingen slutsats om lokalt extremvärde kan dras av detta. Den kvadratiska formens utseende leder oss till att studera f längs linjen $x = y$. Med envariabel-Maclaurinutveckling har vi

$$f(x,x) = 8\cos x + \frac{1}{1-4x^2} = 9 + (16 + \frac{1}{3})x^4 + O(x^6) > 9$$

för alla små $x \neq 0$. Å andra sidan har vi längs linjen $y = -x$ att

$$f(x,-x) = 8\cos x + 1 < 9$$

för alla små $x \neq 0$. Alltså har f inget lokalt extremvärde i origo.

7. Funktionen $F(x,\varepsilon) = x^7 + (1+\varepsilon)\,x$ är av klass $\mathcal{C}^1$, punkten $(x,\varepsilon) = (1,0)$ uppfyller $F(x,\varepsilon) = 2$, och $F'_x(1,0) = [7x^6 + 1 + \varepsilon]_{(1,0)} = 8 \neq 0$, så enligt implicita funktionssatsen definierar ekvationen $F(x,\varepsilon) = 2$ en $\mathcal{C}^1$-funktion $x(\varepsilon)$ lokalt kring $(x,\varepsilon) = (1,0)$. Per definition är $x(0) = 1$, och implicit derivering ger

$$x'(0) = -\frac{F'_\varepsilon(1,0)}{F'_x(1,0)} = -\frac{1}{8}.$$

Lösningen till ekvationen $x^7 + \frac{101}{100}x = 2$, alltså $x(\frac{1}{100})$, bör därför vara ungefär

$$x(\tfrac{1}{100}) \approx x(0) + \tfrac{1}{100}\,x'(0) = 1 + \tfrac{1}{100} \cdot \tfrac{-1}{8} = \tfrac{799}{800}.$$

Svar: $x(0) = 1$, $x'(0) = -1/8$, approximativ lösning 799/800.

(Anm.: Utan noggrannare undersökning, t.ex. genom uppskattning av $|x''(\varepsilon)|$, kan vi naturligtvis inte säga någonting om hur *bra* denna approximation är, för hur vet vi att $\varepsilon = \frac{1}{100}$ är tillräckligt litet för att approximation med hjälp av förstaderivatan ska vara användbart? Numerisk lösning av ekvationen ger dock $x(\frac{1}{100}) \approx 0{,}998747456$, så vårt värde $\frac{799}{800} = 0{,}99875$ var inte jättelångt ifrån.)