

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2018-10-24 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla funktioner $f(x, y)$ av klass C^1 som uppfyller

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2x \frac{\partial f}{\partial y} = 3y, \quad f(1, y) = 0.$$

(Förslag: byt till nya variabler $u = x$ och $v = y - x^2$.)

2. Beräkna $\iint_D (x - 1) dx dy$, där

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ och } x \leq y \leq 0 \right\}.$$

3. Obs! På uppgift 3 ska **enbart svar** lämnas in!

- (a) Bestäm den linje $Ax + By = C$ som tangerar kurvan $3x^2 + 2y = 7 + \sin(2x - y)$ i punkten $(x, y) = (1, 2)$.
- (b) Bestäm riktningsderivatan av $f(x, y) = x^2 - y^4$ i punkten $(3, 2)$, i den riktning som pekar därifrån mot punkten $(0, 4)$.
- (c) Sambandet $y^5 + ye^{3x} - x = 2$ definierar en funktion $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Ange $f(0)$ och $f'(0)$.

4. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y, z) = x + y + z$ då

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \text{och} \quad 2xy = 1.$$

5. Beräkna $\iiint_D z^2 dx dy dz$, där

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \text{ och } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

6. Låt

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^4 + y^2}{x^2 + xy + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Undersök om f är kontinuerlig i $(0, 0)$.
- (b) Beräkna $f'_x(0, 0)$ och $f'_y(0, 0)$ (om de existerar).

7. Undersök om $f(x, y) = e^{2x+y} - 2x - y - 4xy$ har lokalt extremvärde i origo.

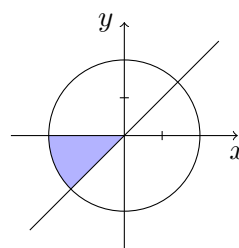
Lösningsskisser till TATA43 Flervariabelanalys 2018-10-24

1. Kedjeregeln ger $f'_x = f'_u - 2xf'_v$ och $f'_y = f'_v$, så PDE:n blir i nya variabler $f'_u = 3(v + u^2)$, vilket ger $f = 3uv + u^3 + g(v) = -2x^3 + 3xy + g(y - x^2)$, där g är en godtycklig C^1 -funktion av en variabel. Villkoret $0 = f(1, y) = -2 + 3y + g(y - 1)$ ger sedan $g(t) = 2 - 3(t + 1) = -1 - 3t$.

Svar: $f(x, y) = -2x^3 + 3xy - 1 - 3(y - x^2)$.

2. Byte till planpolära koordinater ger

$$\begin{aligned} & \iint_D (x - 1) dx dy \\ &= \int_{\varphi=\pi}^{5\pi/4} \left(\int_{\rho=0}^2 (\rho \cos \varphi - 1) \rho d\rho \right) d\varphi \\ &= \int_{\varphi=\pi}^{5\pi/4} \left(\frac{2^3}{3} \cos \varphi - \frac{2^2}{2} \right) d\varphi \\ &= \left[\frac{8}{3} \sin \varphi - 2\varphi \right]_{\pi}^{5\pi/4} = \frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 2 \cdot \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$



Svar: $-\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{2} \right)$.

(Man kan även skriva $\iint_D (x - 1) dx dy = \iint_D x dx dy - \iint_D dx dy = I_1 - I_2$ och räkna ut I_1 som ovan, men istället utnyttja att I_2 är arean av D , en åttondel av en cirkel: $I_2 = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{\pi}{2}$.)

3. **Svar:** (a) $4x + 3y = 10$ (b) $-82/\sqrt{13}$ (c) $f(0) = 1, f'(0) = -1/3$.

(a) Skriv kurvan som $f(x, y) = 3x^2 + 2y - \sin(2x - y) = 7$. Då är $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 2\cos(2x - y) \\ 2 + \cos(2x - y) \end{pmatrix}$ och alltså $\nabla f(1, 2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Detta är en normalvektor till tangentlinjen, vars ekvation därmed blir $4x + 3y = C$, där C bestäms genom att sätta in $(x, y) = (1, 2)$.

(b) Vektorn från punkten $(3, 2)$ till punkten $(0, 4)$ är $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, så enhetsvektorn i den riktningen är $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Riktningensderivatan ges av formeln $f'_{\mathbf{v}}(3, 2) = \nabla f(3, 2) \cdot \mathbf{v}$, där $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -4y^3 \end{pmatrix}$.

(c) Insättning av $x = 0$ i det givna sambandet $y^5 + ye^{3x} - x = 2$ ger $y^5 + y = 2$. Inspektion ger att $y = 1$ är en lösning, och detta är den enda reella lösningen, eftersom vänsterledet är en strängt växande funktion av y . Alltså $f(0) = 1$. Implicit derivering ger $5y^4 y' + y' e^{3x} + 3ye^{3x} - 1 = 0$, vilket då $x = 0$ och $y = 1$ blir $5y' + y' + 3 - 1 = 0$, dvs. $y' = -1/3 = f'(0)$.

4. De två bivillkoren $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och $h(x, y, z) = 2xy = 1$ bestämmer en sluten delmängd av enhetsklotet – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x, y, z) = x + y + z$ är kontinuerlig där, så största och minsta värde existerar. Vidare är $\nabla f = (1, 1, 1)$, $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ och $\nabla h = (2y, 2x, 0)$. Kandidatjakt:

- dim 3 (inre punkter): tomt.
- dim 2 (ytan $g < 1$, $h = 1$): $\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow (1, 1, 1) \parallel (2y, 2x, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$, men då blir $2xy = 0 \neq 1$. Ingen kandidat här.
- dim 1 (kantkurva, $g = 1$, $h = 1$): $\nabla f, \nabla g$ och ∇h är linjärt beroende precis då

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 2y & 2x & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y-x & z \\ y & x-y & 0 \end{vmatrix} = 4(x-y)(x+y-z),$$

Fallet $y = x$ insatt i $g = 1$ och $h = 1$ ger $2x^2 + z^2 = 1$ och $2x^2 = 1$ och därmed kandidaterna $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \sqrt{2}$ och $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\sqrt{2}$. Fallet $z = x + y$ ger analogt $2x^2 + 2y^2 + 2xy = 1$ och $2xy = 1$, som saknar lösning.

- dim 0 (hörnpunkter): saknas.

Svar: $f_{\max}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \sqrt{2}$ och $f_{\min}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\sqrt{2}$.

5. I rymdpolära koordinater fås ett motsvarande område E som ges av $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $0 \leq \theta \leq \pi/3$. Alltså:

$$\begin{aligned} \iiint_D z^2 dx dy dz &= \iiint_E (r \cos \theta)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \left(\int_{r=0}^1 r^4 dr \right) \left(\int_{\theta=0}^{\pi/3} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/3} = 2\pi \cdot \frac{1}{15} \cdot \left(1 - \frac{1}{8} \right). \end{aligned}$$

Svar: $7\pi/60$.

(Man kan även använda stavar i z -led, $\iint_{\tilde{D}} \left(\int_{z=\sqrt{(x^2+y^2)/3}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 dz \right) dx dy$ där \tilde{D} är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 3/4$, men detta ger jobbigare uträkningar.)

6. a) Funktionen är ej kontinuerlig i origo eftersom

$$f(0, k) = \frac{0 + 0 + k^2}{0 + 0 + k^2} = 1 \rightarrow 1 \neq 0 = f(0, 0)$$

b) Derivatans $f'_x(0, 0)$ är lika med nedanstående gränsvärde, om det existerar (ändligt):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 + h^4 + 0}{h^2 + 0 + 0} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h) = 1.$$

Alltså är $f'_x(0, 0) = 1$. För att undersöka $f'_y(0, 0)$ betraktar vi gränsvärdet

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0 + 0 + k^2}{0 + 0 + k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k}.$$

Detta gränsvärde existerar ej ändligt. (Och det existerar ju för övrigt inte i oegentlig mening heller, eftersom $\frac{1}{k} \rightarrow \pm\infty$ då $k \rightarrow 0^\pm$.)

Svar: a) ej kontinuerlig i origo b) $f'_x(0, 0) = 1$, $f'_y(0, 0)$ existerar ej.

7. Från Maclaurinutvecklingen

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{2x+y} - 2x - y - 4xy \\ &= 1 + (2x + y) + \frac{1}{2!}(2x + y)^2 + O(\rho^3) - 2x - y - 4xy \\ &= 1 + \frac{1}{2}((2x + y)^2 - 8xy) + O(\rho^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(2x - y)^2 + O(\rho^3), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

ser man att origo är en stationär punkt för f (eftersom förstgradstermer saknas). Den kvadratiske formen $Q(x, y) = (2x - y)^2$ är dock bara positivt **semidefinit**, så kan vi inte enbart från Q avgöra om det är en lokal extrempunkt eller inte. Låt oss istället undersöka närmare hur f beter sig i de punkter där $Q(x, y) = 0$, dvs. längs linjen $(x, y) = (t, 2t)$:

$$\begin{aligned} f(t, 2t) &= e^{4t} - 4t - 8t^2 \\ &= 1 + 4t + \frac{1}{2!}(4t)^2 + \frac{1}{3!}(4t)^3 + O(t^4) - 4t - 8t^2 \\ &= 1 + \frac{32}{3}t^3 + O(t^4) \\ &= 1 + t^3\left(\frac{32}{3} + O(t)\right). \end{aligned}$$

Uttrycket inom parentes är positivt för alla t tillräckligt nära noll (eftersom det går mot $\frac{32}{3}$ då $t \rightarrow 0$), medan faktorn t^3 framför växlar tecken. Det finns alltså något $\delta > 0$ sådant att $f(t, 2t) < 1$ i intervallet $-\delta < t < 0$ och $f(t, 2t) > 1$ i intervallet $0 < t < \delta$, och därmed är $f(0, 0) = 1$ varken ett lokalt minimum eller ett lokalt maximum.

Svar: f har inte lokalt extremvärde i origo.