Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2018-08-23 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för $f(x,y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3$.

2. Bestäm alla linjer $Ax + By = C$ som tangerar kurvan $4x^2 + y^2 - 6y = 0$ och går genom punkten $(x,y) = (3,0)$. Rita kurvan och dessa linjer i en noggrann figur.

3. Beräkna $\iint_D |x-y|\, dxdy$, där området D ges av $x^2 + y^2 \leq 4$ och $x \geq 0$.

4. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y,z) = z^2 + xy$ då $x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 9$, $z \geq 1$.

5. Ange en partiell differentialekvation av formen
$$A(x,y)\, z'_x + B(x,y)\, z'_y = C(x,y)$$
sådan att $z(x,y) = x^5 + f(x^3 - y^4)$ är en lösning för varje deriverbar envariabelfunktion $f(t)$.

   (En icketrivial PDE sökes, dvs. det triviala svaret med $A = B = C = 0$ gills inte!)

6. Beräkna massan av den kropp D som ges av $x^2 + y + z^{1/2} \leq 1$ och $x, y, z \geq 0$, ifall massdensiteten i punkten (x,y,z) är x.

7. Beräkna $f''_{xz}(0,0,0)$ och $f''_{zx}(0,0,0)$ för funktionen
$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xz^3}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Lösningsskisser till TATA43 Flervariabelanalys 2018-08-23

1. Från $f'_x = 6y - 6x^2 = 0$ och $f'_y = 6x - 6y = 0$ fås de stationära punkterna $(x,y) = (0,0)$ och $(x,y) = (1,1)$. Den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen är

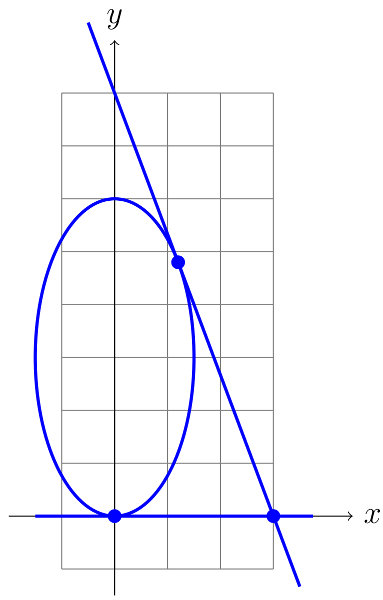
$$Q_{(0,0)}(h,k) = 12hk - 6k^2 = -6(k-h)^2 + 6h^2 \qquad \text{(indefinit)}$$

respektive

$$Q_{(1,1)}(h,k) = -12h^2 + 12hk - 6k^2 = -6(k-h)^2 - 6h^2 \qquad \text{(neg. def.)}.$$

Svar: f har lokalt maximum i punkten $(1,1)$. (Lokalt minimum saknas.)

2. Sätt $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 6y$ och antag att den sökta linjen tangerar kurvan $f(x,y) = 0$ i punkten $(x,y) = (a,b)$. För dettta krävs att $f(a,b) = 0$ och att $\nabla f(a,b)$ är vinkelrät mot vektorn från $(3,0)$ till (a,b):



$$4a^2 + b^2 - 6b = 0, \qquad \begin{pmatrix} 8a \\ 2b-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-3 \\ b-0 \end{pmatrix} = 0.$$

Den andra av dessa ekvationer minus två gånger den första ger $-24a + 6b = 0$, dvs. $b = 4a$. Insättning av detta i den första ekvationen ger $20a^2 - 24a = 0$, dvs. $a = 0$ eller $a = 6/5$. Tangeringspunkten är alltså $(0,0)$ eller $(\frac{6}{5}, \frac{24}{5})$.
Kurvan $4x^2+y^2-6y = 0 \iff \left(\frac{x}{3/2}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{3}\right)^2 = 1$ är en ellips med centrum i $(0,3)$ och halvaxlar av längd $\frac{3}{2}$ resp. 3.

Svar: Tangentlinjerna är $y = 0$ och $8x + 3y = 24$.

3. Linjen $y = x$ delar halvcirkelskivan D i två delområden, D_1 nedanför linjen (alltså där $y \leq x$ så att $|x-y| = x-y$) och D_2 ovanför (där $|x-y| = -(x-y)$). Polära koordinater ger sedan

$$\begin{aligned}
\iint_D |x-y|\,dxdy &= \iint_{D_1} (x-y)\,dxdy - \iint_{D_2} (x-y)\,dxdy \\
&= \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/4} \left(\int_{\rho=0}^{2} \rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)\,d\rho \right) d\varphi \\
&\quad - \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_{\rho=0}^{2} \rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)\,d\rho \right) d\varphi \\
&= \tfrac{8}{3}[\sin\varphi + \cos\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/4} - \tfrac{8}{3}[\sin\varphi + \cos\varphi]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \tfrac{8}{3}(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}} - (-1) - 0) - \tfrac{8}{3}(1 + 0 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \\
&= \tfrac{8}{3}(\sqrt{2} + \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Svar: $16\sqrt{2}/3$.

4. Målfunktionen $f(x,y,z) = xy + z^2$ är kontinuerlig och mängden är en sluten del av en ellipsoid och därmed kompakt, så största och minsta värde existerar. Sätt $g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2$ och $h(x,y,z) = z$; då ges bivillkoren av $g \leq 9$ och $h \geq 1$. Vidare är $\nabla f = (y, x, 2z)$, $\nabla g = (2x, 8y, 2z)$ och $\nabla h = (0,0,1)$. Kandidatjakt:

- dim 3 (inre punkter, $g < 9$, $h > 1$): $\nabla f = 0$ ger $(x,y,z) = (0,0,0)$, uppfyller ej $h > 1$.
- dim 2 (sidoytor), två delar:
  - ($g = 9, h > 1$): $\nabla f \parallel \nabla g$ ger, eftersom $z \neq 0$, $y = 2x$ och $x = 8y$, d.v.s. $x = y = 0$, som insatt i $g = 9$ ger $z = 3$, ty $h > 1$. Kandidat $f(0,0,3) = 9$.
  - ($g < 9, h = 1$): $\nabla f \parallel \nabla h$ ger genast $y = 0$ och $x = 0$. Kandidat $f(0,0,1) = 1$.
- dim 1 (kantkurva, $g = 9, h = 1$): $\nabla f, \nabla g$ och ∇h är linjärt beroende precis då $0 = \begin{vmatrix} y & x & 2z \\ 2x & 8y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(4y^2 - x^2)$, d.v.s. $x^2 = 4y^2$. Insättning $g = 9$ och $h = 1$ ger kandidaterna $f(2,1,1) = f(-2,-1,1) = 3$ och $f(2,-1,1) = f(-2,1,1) = -1$.
- dim 0 (hörnpunkter): saknas.

Svar: $f_{\max} = f(0,0,3) = 9$ och $f_{\min} = f(2,-1,1) = f(-2,1,1) = -1$.

5. Derivering av $z(x,y) = x^5 + f(x^3 - y^4)$ med kedjeregeln ger

$$z'_x(x,y) = 5x^4 + 3x^2 f'(x^3 - y^4), \qquad z'_y(x,y) = -4y^3 f'(x^3 - y^4).$$

För att få en ekvation som uppfylls oavsett vad f är, måste vi kombinera dessa derivator så att termerna innehållande f' tar ut varandra, såhär:

$$\begin{aligned} 4y^3 z'_x + 3x^2 z'_y &= 4y^3\Big(5x^4 + 3x^2 f'(x^3 - y^4)\Big) + 3x^2\Big(-4y^3 f'(x^3 - y^4)\Big) \\ &= 20x^4y^3 + (12x^2y^3 - 12x^2y^3)\, f'(x^3 - y^4) \\ &= 20x^4y^3. \end{aligned}$$

Svar: $4y^3 z'_x + 3x^2 z'_y = 20x^4y^3$.

6. Massan är

$$\iiint_D x\,dxdydz = \iint\limits_{\substack{x^2+y\le 1\\ x,y\ge 0}} \left(\int_{z=0}^{(1-x^2-y)^2} x\,dz\right) dxdy$$
$$= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1-x^2} x(1-x^2-y)^2 dy\right) dx$$
$$= \int_{x=0}^{1} \left[-\tfrac{1}{3}x(1-x^2-y)^3\right]_{y=0}^{1-x^2} dx$$
$$= \int_{x=0}^{1} \tfrac{1}{3}x(1-x^2)^3 dx = \left[-\tfrac{1}{24}(1-x^2)^4\right]_0^1 = \tfrac{1}{24}.$$

Svar: $1/24$.

7. För $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ är

$$f'_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{xz^3}{x^2+y^2+z^2} = \frac{(-x^2+y^2+z^2)z^3}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

och direkt från derivatans definition fås

$$f'_x(0,0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0,0)-f(0,0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

Detta ger

$$f''_{xz}(0,0,0) = \lim_{l\to 0}\frac{f'_x(0,0,l)-f'_x(0,0,0)}{l} = \lim_{l\to 0}\frac{l^5/l^4-0}{l} = 1.$$

Liknande uträkningar visar att $f'_z(x,0,0)=0$ för alla x, vilket medför att $f''_{zx}(0,0,0)=0$.

Svar: $f''_{xz}(0,0,0)=1$ och $f''_{zx}(0,0,0)=0$.