

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2018-05-31 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Beräkna $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, där området D ges av $x^2 + y^2 \leq 4x - 2y + 11$ och $x + y \geq 1$.
2. Bestäm alla funktioner $z(x, y)$ av klass \mathcal{C}^1 som uppfyller differentialekvationen $xz'_x - z'_y = 2x^2$ för $x > 0$ samt bivillkoret $z(1, y) = e^{-y}$. Ledning: Använd t.ex. variabelbytet $u = xe^y$, $v = x$.
3. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för $f(x, y, z) = 4x + 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + x^2y^2$.
4. Bestäm konstanten k så att tangentplanet till ytan $z = x + y^2 + x^3 + k$ då $(x, y) = (1, -1)$ innehåller punkten $(x, y, z) = (2, 3, 4)$.
5. Bestäm största och minsta värde, om sådana finns, av $f(x, y, z) = x + y + z$ på den mängd där $x^2 + y^2 \leq z \leq 2y - x - 1$.
6. Beräkna

$$\iiint_D \frac{1 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dx dy dz$$

där området D ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4$ och $z \geq 0$.

7. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 3x + 4y^2 + z^2 &= 17, \\ 4x + 6y + 4z + e^{xyz} &= 17. \end{aligned}$$

Vilken eller vilka av följande saker garanterar implicita funktionssatsen att man (i princip) kan göra lokalt, nära punkten $(x, y, z) = (0, 2, 1)$?

- (a) Lösa ut x och y som \mathcal{C}^1 -funktioner av z .
- (b) Lösa ut x och z som \mathcal{C}^1 -funktioner av y .
- (c) Lösa ut y och z som \mathcal{C}^1 -funktioner av x .

I de fall där det går, beräkna förstaderivatorna av de utlösta funktionerna i punkten ifråga.

**Lösningsskisser till TATA43/9GMA08 Flervariabelanalys
2018-05-31**

1. Kvadratkomplettering av $x^2 + y^2 \leq 4x - 2y + 11$ ger $(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 16$. Vi får variabelbytet $u = x - 2$, $v = y + 1$ som ger halvcirkelskivan E : $u^2 + v^2 \leq 16$, $u + v \geq 0$ med funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = 1$, följt av bytet

$$\begin{cases} u = r \cos \varphi, \\ v = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{där} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \text{och} \quad \frac{d(u,v)}{d(r,\varphi)} = r$$

Alltså

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_E ((u+2)^2 + (v-1)^2) 1 \cdot dudv \\ &= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^4 ((r \cos \varphi + 2)^2 + (r \sin \varphi - 1)^2) r \cdot dr d\varphi \\ &= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^4 (r^2 + r(4 \cos \varphi - 2 \sin \varphi) + 5) r dr d\varphi \\ &= 104\pi + \frac{128\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Svar: $104\pi + \frac{128\sqrt{2}}{3}$.

2. Med det föreslagna variabelbytet fås enligt kedjeregeln $z'_x = e^y z'_u + z'_v$ och $z'_y = x e^y z'_v$, vilket insatt i ekvationen ger $x z'_v = 2x^2$, dvs. $z'_v = 2v$ (för $v > 0$). Integration ger $z(u, v) = v^2 + g(u)$, där g är en godtycklig C^1 -funktion, alltså $z(x, y) = x^2 + g(xe^y)$. Bivillkoret $z(1, y) = e^{-y}$ ger nu $1 + g(e^y) = e^{-y}$, dvs. $g(t) = \frac{1}{t} - 1$ (för $t > 0$).

Svar: $z(x, y) = x^2 + \frac{1}{xe^y} - 1$.

3. Stationära punkter fås genom att sätta gradienten lika med nollvektorn:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4 + 4x + 2z + 2xy^2 \\ 2y + 2x^2y \\ 2z + 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mittenekvationen $2(1 + x^2)y = 0$ ger genast $y = 0$, och då återstår ett linjärt ekvationssystem för x och z . Man finner att den enda stationära punkten är $(x, y, z) = (-2, 0, 2)$. Från andraderivatorna i denna punkt erhålls på vanligt sätt den kvadratiska formen

$$Q(h, k, l) = 4h^2 + 10k^2 + 2l^2 + 4hl = 2(l + h)^2 + 2h^2 + 10k^2,$$

som är positivt definit (enligt det vanliga resonemanget).

Svar: f har lokalt minimum i punkten $(-2, 0, 2)$. (Lokalt maximum saknas.)

4. Sätt $f(x, y) = x + y^2 + x^3 + k$, så att ytan är $z = f(x, y)$. Ekvationen för tangentplanet ifråga är

$$\begin{aligned} z &= f(1, -1) + f'_x(1, -1)(x - 1) + f'_y(1, -1)(y - (-1)) \\ &= 3 + k + 4(x - 1) - 2(y + 1) \\ &= k - 3 + 4x - 2y, \end{aligned}$$

vilket satisfieras av punkten $(x, y, z) = (2, 3, 4)$ om och endast om

$$4 = k - 3 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \quad \iff \quad k = 5.$$

Svar: $k = 5$.

5. Bivillkoren $g := x^2 + y^2 - z \leq 0$ och $h := x - 2y + z + 1 \leq 0$ bestämmer en sluten och begränsad mängd och funktionen $f = x + y + z$ är ett polynom, alltså kontinuerlig. Alltså existerar största och minsta värde för f på den mängden. Vi har $\nabla f = (1, 1, 1)$, $\nabla g = (2x, 2y, -1)$ och $\nabla h = (1, -2, 1)$

Inre punkter (dim 3): $\nabla f \neq \mathbf{0}$ överallt. Kandidater saknas.

Randpunkter (dim 2):

- (i) $g = 0$, $h < 0$. Ett aktivt villkor $g = 0$ ger att $\nabla f \parallel \nabla g \iff \nabla f \times \nabla g = \mathbf{0} \iff x = y = -\frac{1}{2}$ som insatt i $g = 0$ ger $z = \frac{1}{2}$. Men punkten $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ uppfyller inte villkoret $h < 0$.
- (ii) $g < 0$, $h = 0$. Ett aktivt villkor $h = 0$. Eftersom $\nabla f \nparallel \nabla h$, kandidater här saknas också.

Randpunkter (dim 1): två aktiva bivillkoren $g = 0$, $h = 0$, alltså är ∇f , ∇g och ∇h är linjärt beroende. Detta ger att

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3(2x + 1) = 0 \quad \iff \quad x = -\frac{1}{2}$$

som insatt i $g = h = 0$ ger $y = z = \frac{1}{2}$ eller $y = \frac{3}{2}$ och $z = \frac{5}{2}$. Kandidater: $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ och $f(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}) = \frac{7}{2}$.

Svar: $f_{\min} = f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ och $f_{\max} = f(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}) = \frac{7}{2}$.

6. Integralen är generaliserad eftersom området D är obegränsat, men integranden är positiv så vi kan räkna på som vanligt, och t.ex. byta till rymdpolära koordinater:

$$\begin{aligned} & \iiint_D \frac{1+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3} dx dy dz \\ &= \int_{r=2}^{\infty} \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1+r^2 \cos^2 \theta}{(r^2)^3} r^2 \sin \theta d\varphi \right) d\theta \right) dr \\ &= 2\pi \int_{r=2}^{\infty} \left[\frac{-\cos \theta - r^2 \cdot \frac{1}{3} \cos^3 \theta}{r^4} \right]_0^{\pi/2} dr \\ &= 2\pi \int_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{3r^2} \right) dr = 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{3r^3} - \frac{1}{3r} \right]_{r=2}^R = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Svar: $5\pi/12$.

7. Sätt $F(x, y, z) = 3x + 4y^2 + z^2$ och $G(x, y, z) = 4x + 6y + 4z + e^{xyz}$. Då är F och G av klass \mathcal{C}^1 , och den givna punkten uppfyller ekvationerna: $F(0, 2, 1) = 17$, $G(0, 2, 1) = 17$. Det återstående villkoret som krävs för att implicita funktionssatsen ska visa att ekvationssystemet lokalt definierar x och y som \mathcal{C}^1 -funktioner av z är att determinanten $\frac{d(F,G)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}$ är skild från noll i punkten $(0, 2, 1)$. Detta är samma sak som att z -komponenten är skild från noll i kryssprodukten

$$\nabla F(0, 2, 1) \times \nabla G(0, 2, 1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 0 \\ -78 \end{pmatrix},$$

vilket uppenbarligen är sant. Svaret i (a) är alltså att det går. Implicit derivering av $F(x(z), y(z), z) = 17$ och $G(x(z), y(z), z) = 17$ ger (efter insättning av $z = 1$, $x(1) = 0$, $y(1) = 2$) ett 2×2 -ekvationssystem för derivatorna $x'(1)$ och $y'(1)$; de kan också fås direkt såhär¹:

$$\begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{-78} \begin{pmatrix} 52 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vad gäller (b) så är y -komponenten i kryssprodukten noll, så i det fallet säger inte implicita funktionssatsen någonting. Däremot går även (c) bra, eftersom x -komponenten är nollskild, och derivatorna av $y(x)$ och $z(x)$ då $x = 0$ blir

$$\begin{pmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{52} \begin{pmatrix} 0 \\ -78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

¹Kurvan $(x(z), y(z), z)$ beskriver skärningen mellan ytorna $F = 17$ och $G = 17$, och har tangentvektorn $(x'(z), y'(z), 1)$. Kryssprodukten är också tangentvektor till skärningskurvan. Alltså måste $(x'(1), y'(1), 1)$ vara parallell med $(52, 0, -78)$.