Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2018-01-04 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Beräkna $\iint_D \frac{x+2y}{3y-x}\,dxdy$, där området D ges av $2 \le 3y-x \le 6$ och $2 \le 2x-y \le 4$.

2. Bestäm alla funktioner $f(x,y,z)$ av klass $\mathcal{C}^1$ som uppfyller
$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy^2e^y + yze^z \\ yx^2(y+2)e^y + (xz+1)e^z + 3 \\ y(xz+x+1)e^z + 2z \end{pmatrix}, \qquad f(0,1,0) = 2.$$

3. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y,z) = 3xz - y$ på halvklotet
$$x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \qquad z \ge 0.$$

4. Bestäm alla linjer $Ax + By = C$ som går genom punkten $(-2,-4)$ och tangerar kurvan $(x,y) = (t^2+1, t^2-t)$, $t \in \mathbf{R}$.

5. Beräkna volymen av området
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z \ge (x^2+y^2)^{1/4},\ 3x^2 + 3y^2 + z^2 \le 4\}.$$

6. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för
$$f(x,y) = x^2 - 2x - 2xy + 2y + y^2 + 4y^3 + 3y^4.$$

7. En parametriserad kurva $(x(t), y(t))$ i xy-planet avbildas via sambanden
$$(u,v) = (x + y^3, x^3y^2)$$
på en kurva $(u(t), v(t))$ i uv-planet. Om $(x(0), y(0)) = (2,1)$, vad ska kurvans tangentvektor $\binom{x'(0)}{y'(0)}$ vara för att man i motsvarande punkt på kurvan i uv-planet ska få tangentvektorn $\binom{u'(0)}{v'(0)} = \binom{1}{0}$?

Lösningsskisser till TATA43, 9GMA08 Flervariabelanalys 2018-01-04

1. Variabelbytet $u = 3y - x$, $v = 2x - y$ ger direkt ett nytt område E med gränserna $2 \le u \le 6$ och $2 \le v \le 4$. Funktionaldeterminanten $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$ ger $dudv = |-5|\, dxdy = 5\, dxdy$. Alltså

$$\iint_D \frac{x+2y}{3y-x}\, dxdy = \iint_E \frac{u+v}{u} \frac{dudv}{5} = \frac{1}{5} \int_{u=2}^{6} \left(\int_{v=2}^{4} \left(1 + \frac{v}{u}\right) dv \right) du$$
$$= \frac{1}{5} \int_{u=2}^{6} \left(2 + \frac{6}{u}\right) du = \frac{1}{5}(8 + 6\ln(6/2)).$$

Svar: $\frac{2}{5}(4 + 3\ln 3)$.

2. Från den första ekvationen $f'_x = 2xy^2e^y + yze^z$ fås $f(x,y,z) = x^2y^2e^y + xyze^z + g(y,z)$ för någon ännu okänd funktion $g(y,z)$. Insättning av detta i den andra ekvationen $f'_y = yx^2(y+2)e^y + (xz+1)e^z + 3$ ger $g'_y = e^z + 3$, dvs. $g(y,z) = y(e^z+3) + h(z)$ för någon funktion $h(z)$. Insättning av det vi nu vet om f i den sista ekvationen $f'_z = y(xz+x+1)e^z + 2z$ ger $h' = 2z$, alltså $h(z) = z^2 + C$ för någon konstant C. Alltså $f(x,y,z) = x^2y^2e^y + xyze^z + y(e^z+3) + z^2 + C$, och villkoret $f(0,1,0) = 2$ ger $C = -2$.

Svar: $f(x,y,z) = x^2y^2e^y + xyze^z + y(e^z+3) + z^2 - 2$.

3. De två bivillkoren $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ och $h(x,y,z) = z \ge 0$ beskriver ett halvklot som är en kompakt mängd. Målfunktionen $f(x,y) = 3xz - y$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

Vi får $\nabla f = (3z, -1, 3x)$, $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla h = (0,0,1)$. Kandidatjakt:

- dim 3: (inre punkter, $g < 1, h > 0$): $\nabla f = (3z, -1, 3x) \ne 0$ överallt, finns inga kandidater.
- dim 2 (sidoytor) består av två delar:
  - ◇ $g = 1$, $h > 0$: $\nabla f \parallel \nabla g$ gäller då
  $$\mathbf{0} = \nabla f \times \nabla g = (-2z - 6xy, 6x^2 - 6z^2, 6yz + 2x).$$
  Andra komponenten ger $x = \pm z$, vilket insatt i övriga komponenter ger möjligheterna $x = z$, $y = -1/3$ eller $x = -z$, $y = 1/3$ (eller $x = z = 0$ som ej ger någon lösning då $h = z > 0$), vilket insatt i ekvationen $g = 1$ ger kandidaterna $f(2/3, -1/3, 2/3) = 5/3$ och $f(-2/3, 1/3, 2/3) = -5/3$.

- $\diamond$ $h = 0$, $g < 1$: $\nabla f \parallel \nabla h$ ger inga lösningar.

- dim 1 (kantkurva $g = 1, h = 0$): $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ linjärt beroende, dvs

$$\begin{vmatrix} 3z & 2x & 0 \\ -1 & 2y & 0 \\ 3x & 2z & 1 \end{vmatrix} = 6yz + 2x = 0$$

  vilket tillsammans med ekvationen $h = 0$ ger $x = 0$. Insättning i $g = 1$ ger kandidater $f(0, 1, 0) = -1$ och $f(0, -1, 0) = 1$.

- dim 0 (hörnpunkter): saknas.

Svar: Max: $f(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{5}{3}$ och Min: $f(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = -\frac{5}{3}$.

4. Vi söker en punkt $P = (x(t), y(t))$ på kurvan sådan att vektorn från P till $(-2, 4)$ är parallell med kurvans tangentvektor i P, alltså $\binom{x'(t)}{y'(t)}$. Detta ger

$$\begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ t^2 - t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2t \\ 2t - 1 \end{pmatrix},$$

vilket är uppfyllt då

$$0 = \begin{vmatrix} t^2 + 3 & 2t \\ t^2 - t + 4 & 2t - 1 \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 3 = (t + 1)(t - 3).$$

Insättning av värdena $t = -1$ och $t = 3$ ger punkterna $(x, y) = (2, 2)$ respektive $(10, 6)$, och att räkna ut ekvationerna för de linjer som förbinder dessa punkter med $(-2, -4)$ är en rutinsak.

Svar: $3x - 2y = 2$ och $5x - 6y = 14$.

5. V:s volym är

$$\iiint_D dxdydz = \iint_E \left(\int_{z=(x^2+y^2)^{1/4}}^{(4-3x^2-3y^2)^{1/2}} dz \right) dxdy$$

där E är det område i $\mathbf{R}^2$ där olikheten

$$(x^2 + y^2)^{1/4} \leq (4 - 3x^2 - 3y^2)^{1/2}$$

gäller. I polära koordinater (ρ, φ) fås $\sqrt{\rho} \leq \sqrt{4 - 3\rho^2}$, alltså $0 \leq \rho \leq 1$, så E är helt enkelt enhetscirkelskivan. Integralen ovan blir alltså

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^1 \left(\sqrt{4 - 3\rho^2} - \sqrt{\rho} \right) \rho \, d\rho &= 2\pi \left[-\tfrac{1}{9}(4 - 3\rho^2)^{3/2} - \tfrac{2}{5}\rho^{5/2} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left(\frac{4^{3/2} - 1}{9} - \frac{2}{5} \right) = 2\pi \left(\frac{7}{9} - \frac{2}{5} \right). \end{aligned}$$

Svar: $34\pi/45$.

6. Stationära punkter: $f'_x = 2x - 2 - 2y = 0$, $f'_y = -2x + 2 + 2y + 12y^2 + 12y^3 = 0$. Insättning av den första ekvationen i den andra ger $y^2(1+y) = 0$, alltså $y = 0$ eller $y = -1$, som ger de stationära punkterna $(0, -1)$ och $(1, 0)$.

   Vi får $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = -2$ och $f''_{yy} = 2 + 24y + 36y^2$.

   I punkten $(0, -1)$ blir $f''_{yy} = 14$, och den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= 2h^2 - 4hk + 14k^2 = 2((h-k)^2 + 6k^2), \end{aligned}$$

   då $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k) och $Q(h,k) = 0$ endast om $h - k = k = 0$, dvs endast om $(h,k) = (0,0)$. Q är alltså positivt definit, och punkten $(0, -1)$ är därmed en lokal minimipunkt för f.

   I punkten $(1, 0)$ blir $f''_{yy} = 2$, och den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = 2h^2 - 4hk + 2k^2 = 2(h-k)^2,$$

   som är positivt semidefinit, ty $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k) och t.ex. $Q(1,-1) = 0$. För att avgöra karaktären på punkten $(1, 0)$ räcker alltså inte Q ensam. En Taylor-utveckling av f kring $(1, 0)$ ger dock

$$f(1+h, 0+k) - f(1,0) = (h-k)^2 + 4k^3 + 3k^4,$$

   och här ser vi att längs linjen $(x,y) = (1+t, 0+t)$ (dvs $h = k = t$), som passerar $(1, 0)$ precis då $t = 0$, gäller

$$f(1+t, 0+t) - f(1,0) = 4t^3 + 3t^4 = t^3(4+3t) \begin{cases} > 0 & \text{då } t > 0 \text{ litet} \\ = 0 & \text{då } t = 0 \\ < 0 & \text{då } t < 0 \text{ litet} \end{cases}$$

   så $(1, 0)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   Svar: $(0, -1)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

7. Kurvan i uv-planet ges av

$$u(t) = x(t) + y(t)^3, \qquad v(t) = x(t)^3 y(t)^2,$$

   så med kedjeregeln fås

$$u'(t) = x'(t) + 3y(t)^2 y'(t), \quad v'(t) = 3x(t)^2 x'(t) \cdot y(t)^2 + x(t)^3 \cdot 2y(t)y'(t).$$

Insättning av $t = 0$ och de givna värdena $x(0) = 2$ och $y(0) = 1$ ger

$$u'(0) = x'(0) + 3y'(0), \quad v'(0) = 12x'(0) + 16y'(0),$$

dvs.

$$\begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}.$$

(Anmärkning: Matrisen här är helt enkelt avbildningens funktionalmatris i punkten $(x, y) = (2, 1)$.) För att få $u'(0) = 1$ och $v'(0) = 0$ måste vi ta

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-20} \begin{pmatrix} 16 & -3 \\ -12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Svar: $x'(0) = -4/5$ och $y'(0) = 3/5$.