Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2017-10-20 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för $f(x,y) = 3x^2 + y^2 + 4xy + \frac{2}{3}x^3$. (3p)

2. Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{1+(x^2+y^2)^4}\,dxdy$, där $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < \sqrt{3}\,y\}$. (3p)

3. Låt N vara normallinjen till kurvan $x^2 + y^2 + kxy = 1$ i punkten $(1,0)$. Bestäm konstanten k så att linjen N går genom punkten $(-2,2)$. (3p)

4. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y,z) = x - y + z$ då $x^2 + y^2 \leq 4z$ och $y + z \leq 4$. (3p)

5. Bestäm alla funktioner $f(x,y,z)$ av klass $\mathcal{C}^1$ (för $x > 0$) sådana att

$$x\,f'_x - xf'_y - z\,f'_z = 0, \qquad f(1,y,z) = yz.$$

(Ledning: Använd t.ex. variabelbytet $u = y$, $v = x + y$, $w = xz$.) (3p)

6. Beräkna $\displaystyle\iiint_D z\,dxdydz$, där $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z^2 \leq x \leq y \leq 2z\}$. (3p)

7. Visa att avbildningen $\begin{cases} u = & x + y^5 \\ v = & y + z^5 \\ w = & z + x^5 \end{cases}$

   a) har en C^1-invers lokalt kring varje punkt i $\mathbf{R}^3$; (1p)

   b) har en C^1-invers i $\mathbf{R}^3$. (2p)

Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2017-10-20

1. Derivatorna $f'_x = 6x + 4y + 2x^2$ och $f'_y = 2y + 4x$ är noll om och endast om $(x, y) = (0, 0)$ eller $(x, y) = (1, -2)$. Andraderivatorna $f''_{xx} = 6 + 4x$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = 2$ uträknade i dessa punkter ger de kvadratiska formerna

$$Q_{(0,0)}(h, k) = 6h^2 + 8hk + 2k^2 = 2(k + 2h)^2 - 2h^2$$

och

$$Q_{(1,-2)}(h, k) = 10h^2 + 8hk + 2k^2 = 2(k + 2h)^2 + 2h^2.$$

Den första är indefinit, t.ex. är $Q_{(0,0)}(1, -2) < 0 < Q_{(0,0)}(0, 1)$, så $(0, 0)$ är en sadelpunkt. Den andra är positivt definit, eftersom den är uppenbart ickenegativ, och lika med noll bara då $k + 2h = h = 0$, dvs. då $h = k = 0$; alltså har f (strängt) lokalt minimum i $(1, -2)$.

Svar: $(1, -2)$ är en lokal minimipunkt.

2. Integralen är generaliserad eftersom området D är obegränsat, men integranden $xy/(1 + (x^2 + y^2)^4$ är positiv i D, så vi kan räkna som vanligt. Byte till polära koordinater ger

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{xy}{1 + (x^2 + y^2)^4}\, dxdy &= \int_{\rho=0}^{\infty} \left(\int_{\varphi=\pi/6}^{\pi/2} \frac{\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{1 + \rho^8}\, \rho\, d\varphi \right) d\rho \\ &= \lim_{\omega\to\infty} \Big[\tfrac{1}{4} \arctan(\rho^4) \Big]_0^{\omega} \Big[\tfrac{1}{2} \sin^2\varphi \Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \Big(1^2 - (1/2)^2 \Big) = \frac{3\pi}{64}.\end{aligned}$$

Svar: $3\pi/64$.

3. Sätt $f(x, y) = x^2 + y^2 + kxy$, så att kurvan är $f(x, y) = 1$. Gradienten

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + ky \\ 2y + kx \end{pmatrix}$$

är vinkelrät mot f:s nivåkurvor, så normallinjen N har riktningsvektor

$$\nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}.$$

Linjen N går genom $(-2, 2)$ om och endast om denna riktningsvektor är parallell med vektorn från $(1, 0)$ till $(-2, 2)$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = -\frac{4}{3}.$$

Svar: $k = -4/3$.

4. De två bivillkoren $g = y + z - 4 \leq 0$ och $h = x^2 + y^2 - 4z \leq 0$ bestämmer en sluten delmängd av en sluten paraboloid – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x, y) = x - y + z$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (1, -1, 1)$, $\nabla g = (0, 1, 1)$, $\nabla h = (2x, 2y, -4)$. Kandidatjakt:

   - *Inre punkter* ($g < 0, h < 0$): $\nabla f \neq 0$ överallt, finns inga kandidater.
   - *Kandidater i ytan* $g = 0$ och $h < 0$ finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. när $0 = \nabla f \times \nabla g = (-2, -1, 1)$, alltså saknas.
   - *Kandidater i ytan* $h = 0$ och $g < 0$ finns där $\nabla f \parallel \nabla h$, d.v.s. när $\nabla f \times \nabla h = 0$:

   $$\begin{cases} \nabla f \times \nabla h &= 0 \\ h &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 2x = 0 \\ -4 - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -2 \\ y &= 2 \\ z &= 2 \end{cases}$$

   Eftersom $g(-2, 2, 2) = 0 \not< 0$, finns inga kandidater här.
   - *Randpunkter*: $h = g = 0$ finns där $\det(\nabla f, \nabla g, \nabla h) = 0$:

   $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & -4 \end{vmatrix} = -4x - 2y - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = -2 - 2x$$

   alltså

   $$\begin{cases} z + y - 4 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4z &= 0 \\ y &= -2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 &= 20 \\ y &= -2 - 2x \\ z &= 6 + 2x \end{cases}$$

   ger $(-2, 2, 2)$ och $(2, -6, 10)$ vilket ger två kandidater:

   $$\boxed{f(-2, 2, 2) = -2} \quad \text{och} \quad \boxed{f(2, -6, 10) = 18}.$$

   Svar: Max: $f(2, -6, 10) = 18$ och Min: $f(-2, 2, 2) = -2$

5. Med det föreslagna variabelbytet fås från kedjeregeln att $f'_x = f'_v + z\, f'_w$, $f'_y = f'_u + f'_v$ och $f'_z = x\, f'_w$. Insättning i PDE:n ger

   $$0 = x\,(f'_x - f'_y) - z\, f'_z = x\,(z\, f'_w - f'_u) - z\, x\, f'_w = -x\, f'_u,$$

   alltså $f'_u = 0$ (eftersom vi förutsätter $x > 0$). Därmed är $f(u, v, w) = g(v, w)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av två variabler. I de ursprungliga variablerna fås alltså

   $$f(x, y, z) = g(x + y, xz).$$

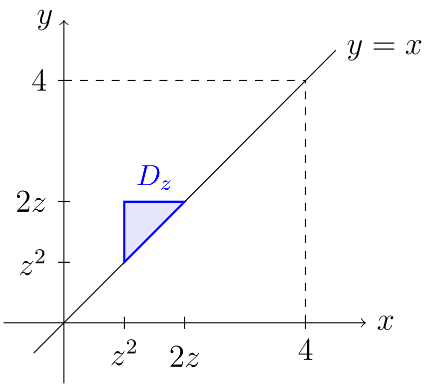
   Bivillkoret ger $yz = f(1, y, z) = g(1 + y, z)$, så att $g(s, t) = (s - 1)t$, och följaktligen $f(x, y, z) = (x + y - 1)xz$.

   Svar: $f(x, y, z) = (x + y - 1)xz$.

   (Ett litet tips: Det är lätt att kontrollera genom insättning att svaret uppfyller både PDE:n och bivillkoret!)

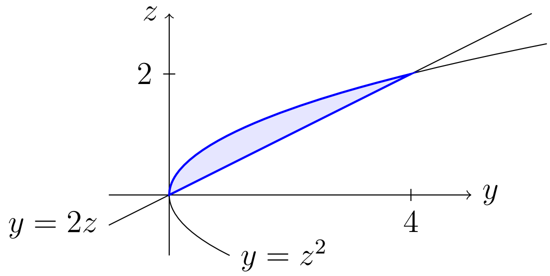
6. Ett enkelt sätt är skivor för fixt z: om man håller z konstant i olikheterna $z^2 \leq x \leq y \leq 2z$ så ser man att tvärsnittet D_z är en halv kvadrat med sidlängd $2z - z^2$ (förutsatt att $z^2 \leq 2z$, dvs. $0 \leq z \leq 2$), så

$$\iiint_D z\,dxdydz = \int_{z=0}^{2} \left(\iint_{D_z} z\,dxdy \right) dz = \int_{z=0}^{2} z \text{ area}(D_z)\,dz$$
$$= \int_{z=0}^{2} z \cdot \tfrac{1}{2}(2z - z^2)^2\,dz = \frac{8}{15}.$$



Men det går på flera andra sätt också, t.ex. stavar i x-led: olikheterna för D ger direkt gränserna $z^2 \leq x \leq y$ för den inre x-integralen, och kroppens projektion $\widetilde{D}$ på yz-planet ges av $z^2 \leq y \leq 2z$, dvs. området mellan kurvan $y = z^2$ och linjen $y = 2z$. Alltså

$$\iiint_D z\,dxdydz = \iint_{\widetilde{D}} \left(\int_{x=z^2}^{y} z\,dx \right) dydz = \iint_{\widetilde{D}} z(y - z^2)\,dydz$$
$$= \int_{z=0}^{2} \left(\int_{y=z^2}^{2z} z(y - z^2)\,dy \right) dz = \frac{8}{15}.$$



Svar: $8/15$.

7. a) Funktioner $u = x + y^5$, $v = y + z^5$, $w = z + x^5$ är polynom, alltså är avbildningen (u, v, w) av klass C^1. Funktionaldeterminanten är

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 5y^4 & 0 \\ 0 & 1 & 5z^4 \\ 5x^4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 125x^4y^4z^4 \geq 1 > 0$$

och därmed $\neq 0$ för alla $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Inversa funktionssatsen ger lokalt definierade C^1-inverser kring varje punkt.

b) Vi måste nu visa att det finns en global invers; denna sammanfaller i så fall med de lokala inverserna och är därmed C^1–inversen är ju entydigt bestämd, när den finns.

Om (x_1, y_1, z_1) och (x_2, y_2, z_2) båda avbildas på samma punkt (u, v, w) i uvw-rummet, så är

$$\begin{aligned} u = x_1 + y_1^5 = x_2 + y_2^5 \quad &\Rightarrow \quad x_1 - x_2 = y_2^5 - y_1^5 \\ v = y_1 + z_1^5 = y_2 + z_2^5 \quad &\Rightarrow \quad y_1 - y_2 = z_2^5 - z_1^5 \\ w = z_1 + x_1^5 = z_2 + x_2^5 \quad &\Rightarrow \quad z_1 - z_2 = x_2^5 - x_1^5 \end{aligned}$$

så om exempelvis $x_1 > x_2$ inser vi att i tur och ordning $y_1 < y_2$, $z_1 > z_2$ och $x_1 < x_2$, en motsägelse (obs. att funktionen $t \to t^5$ är strängt växande!). På samma sätt inser vi att $x_1 < x_2$ är omöjligt, och därmed måste alltså $x_1 = x_2$. Detta ger nu genast att även $z_1 = z_2$ och $y_1 = y_2$, så avbildningen är injektiv och har därmed en invers.